

А. Б. МИХАЙЛОВСКИЙ

ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

ТОМ 2

НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Издание 2-е,
переработанное, дополненное



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1977

для проблемы управляемого термоядерного синтеза (при очень малом β нельзя добиться положительного энергетического баланса).

При теоретическом исследовании неустойчивостей плазмы с немалым β необходимо учитывать непотенциальность электрического поля возмущений и неоднородность стационарного магнитного поля. Это требует усложнения соответствующего математического аппарата (см. гл. 13), где выводятся уравнения колебаний бесстолкновительной плазмы в прямом магнитном поле.

Важным частным случаем плазмы с немалым β является так называемая плазма низкого давления, $m_e/m_i \ll \beta \ll 1$, где m_e , m_i — массы электронов и ионов. Обсуждению градиентных неустойчивостей такой плазмы посвящена гл. 14.

В космических условиях плазма обладает параметром β порядка единицы $\beta \approx 1$. То же касается и плазмы ряда экспериментальных устройств, в частности термоядерных установок типа тэта-пинча. Плазму с $\beta \approx 1$ называют также плазмой конечного давления. Градиентные неустойчивости бесстолкновительной плазмы конечного давления исследуются в гл. 15, а столкновительной — в гл. 16. Наконец, гл. 17 посвящена исследованию неустойчивостей плазмы большого давления, $\beta \gg 1$.

Излагаемый в настоящем томе анализ неустойчивостей неоднородной плазмы не является исчерпывающим. В частности, не обсуждается важный класс неустойчивостей запертых частиц. Более подробную картину о неустойчивостях неоднородной плазмы можно получить, обращаясь к работам, указанным в библиографических обзорах к соответствующим главам.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЫ НА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВА СКОРОСТЕЙ

Глава 1

ПУЧКОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В ОТСУТСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1.1. Введение

Прежде чем исследовать влияние неоднородности плазмы на ее неустойчивости, рассмотрим некоторые общие свойства неоднородной плазмы.

Первый вопрос, который встает при исследовании колебаний и устойчивости неоднородной плазмы, — это вопрос о ее стационарном (равновесном) состоянии. Этот вопрос обсуждается в § 1.2, где приведено решение кинетического уравнения для стационарной функции распределения.

Как и в теории колебаний однородной плазмы, нам необходимо знать диэлектрическую проницаемость плазмы. Такого рода вычисление для неоднородной плазмы со стационарной функцией распределения, найденной в § 1.2, проводится в § 1.3.

Зная диэлектрическую проницаемость неоднородной плазмы, можно оценить пределы применимости приближения однородной плазмы. Такие оценки для некоторых типов пучковых неустойчивостей сделаны в § 1.4.

Если приближение однородной плазмы неприменимо, то необходимо рассматривать развитие неустойчивостей с учетом неоднородности плазмы. Такое рассмотрение в «квазиклассическом» приближении проводится в § 1.5.

В пространственно-неоднородной плазме могут развиваться некоторые специфические разновидности пучковых неустойчивостей, не обнаруживаемые в приближении однородной плазмы. Примеры таких неустойчивостей рассматриваются в § 1.6 (неустойчивость потока с

неоднородным профилем скорости) и в § 1.7 (неустойчивость потока, ограниченного катодом и анодом). На первом примере иллюстрируется также метод поверхностных волн, на втором — связь между элементарными типами возмущений в ограниченных системах.

§ 1.2. Стационарная функция распределения неоднородной плазмы

Если плазма однородна и если в ней нет стационарных магнитного и электрического полей, то стационарная функция распределения каждого сорта зарядов f_0 в отсутствие столкновений между частицами может быть произвольной функцией вектора скорости \mathbf{v} :

$$f_0 = F(\mathbf{v}). \quad (1.1)$$

При наличии магнитного поля \mathbf{B}_0 стационарная функция распределения соответствующего сорта зарядов однородной плазмы удовлетворяет кинетическому уравнению

$$[\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B] \partial f_0 / \partial \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}_B = e\mathbf{B}_0/mc$ — циклотронная частота частиц; e , m — их заряд и масса; c — скорость света. Как отмечалось в § 5.2 т. 1, общее решение (1.2) — функция распределения вида

$$f_0 = F(\epsilon_{\perp}, v_{\parallel}), \quad (1.3)$$

где $\epsilon_{\perp} = v_{\perp}^2/2$; v_{\perp} , v_{\parallel} — поперечная и продольная скорости частицы.

В случае неоднородной плазмы кинетическое уравнение для равновесной функции распределения имеет вид

$$\mathbf{v} \nabla f_0 + \mathbf{F}_0 \partial f_0 / \partial \mathbf{v} = 0, \quad (1.4)$$

где \mathbf{F}_0 — равновесная сила, действующая на частицу (отнесенная к единице массы). В общем случае сила \mathbf{F}_0 складывается из электрической и магнитной составляющих

$$\mathbf{F}_0 = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 + [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B], \quad (1.5)$$

где \mathbf{E}_0 — равновесное электрическое поле.

При $\mathbf{E}_0 = 0$ уравнение (1.4) представляет собой обобщение уравнения (1.2) на случай неоднородной плазмы:

$$\mathbf{v} \nabla f_0 + [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B] \partial f_0 / \partial \mathbf{v} = 0. \quad (1.6)$$

Устойчивость стационарных состояний, описываемых кинетическим уравнением (1.6), а также уравнением (1.5) с $\boldsymbol{\omega}_B \neq 0$, рассмотрим в следующих главах. (Эти уравнения важны в задачах о магнитном удержании плазмы.)

Изучим некоторые простейшие свойства колебаний неоднородной плазмы, не связанные со стационарным магнитным полем. С этой целью примем, что стационарное магнитное поле отсутствует, $\mathbf{B}_0 = 0$, так что стационарная неоднородность плазмы поддерживается стационарным электрическим полем:

$$\mathbf{v} \nabla f_0 + \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.7)$$

Фактически стационарное состояние неоднородной плазмы при наличии одного лишь электрического поля невозможно, так как уравнение (1.7) нельзя удовлетворить одновременно для электронов и ионов. Ниже полагается, что уравнение (1.7) относится только к электронам, и изучаются чисто электронные колебания. При этом движение ионов, вообще говоря, представляющее собой нестационарный процесс, считается пренебрежимо медленным.

В частном случае одномерной неоднородности, $\nabla f_0 \parallel \mathbf{z}$, $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$ (\mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси \mathbf{z}) уравнение (1.7) означает

$$v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{e}{m} E_0 \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0. \quad (1.8)$$

Полагая $E_0 = -\partial \psi_0 / \partial z$, из (1.8) находим

$$f_0 = F(\epsilon), \quad (1.9)$$

где $\epsilon \equiv v_z^2/2 + e\psi_0/m$ — полная энергия движения частицы единичной массы вдоль оси \mathbf{z} , которая не зависит от координаты z . Она, как и функция F , является интегралом движения.

§ 1.3. Диэлектрическая проницаемость слабонеоднородной плазмы в отсутствие магнитного поля

Кинетическое уравнение для возмущенной функции распределения f неоднородной плазмы имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \mathbf{F}_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.10)$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{B} — возмущенные величины. Уравнение (1.10) решаем методом интегрирования по траекториям, изложенным в § 5.2 т. 1.

Выразим в (1.10) все функции переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} , t через новые переменные \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 , t , связанные с \mathbf{r} , \mathbf{v} , t соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} t &= \tau; \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau) &= \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau') d\tau'; \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau) &= \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \tau') d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Здесь t_0 — произвольный момент времени. Например, роль параметра t_0 может играть момент включения возмущения.

Очевидно, в переменных \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 , τ функции \mathbf{r} и \mathbf{v} представляют собой взятые в момент времени τ значения координат и скорости частицы, которая при $\tau = t_0$ находится в точке \mathbf{r}_0 и имеет скорость \mathbf{v}_0 . При таком выборе новых переменных имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}, \mathbf{v}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right)_{t, \mathbf{v}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)_{t, \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} = \mathbf{v}; \quad \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} = \mathbf{F}_0, \quad (1.13)$$

то правая часть (1.12) совпадает с левой частью (1.10), так что в новых переменных кинетическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.14)$$

Отсюда находим искомое:

$$f(\tau, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = f(\tau_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) - \frac{e}{m} \int_{t_0}^{\tau} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d\tau'. \quad (1.15)$$

Здесь $f(\tau_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ — начальная функция распределения.

Представим возмущенное электромагнитное поле в виде интегралов от их фурье-лаплас-компонент. В переменных \mathbf{r} , t эти интегралы имеют вид

$$\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\} = \int d\mathbf{k} d\omega \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega(t - t_0)\} \{\mathbf{E}_{k\omega}, \mathbf{B}_{k\omega}\}. \quad (1.16)$$

Интегрирование проводится по всем вещественным \mathbf{k} и по комплексным ω с $\text{Im } \omega = \sigma$, где σ лежит выше всех особенностей функций $\mathbf{E}_{k\omega}$, $\mathbf{B}_{k\omega}$ (см. подробнее § 2.1 т. 1). Подставляя (1.16) в (1.15) и учитывая, что координаты и время должны быть выражены через \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 , τ , получаем

$$\begin{aligned} f = f(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) - \frac{e}{m} \int d\mathbf{k} d\omega \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau) - i\omega(\tau - t_0)\} \times \\ \times \int_{t_0}^{\tau} \exp\{i\omega(\tau - \tau') - i\mathbf{k} \int_{\tau'}^{\tau} \mathbf{v}(\tau'') d\tau''\} \left(\mathbf{E}_{k\omega} + \left[\frac{\mathbf{v}(\tau')}{c}, \mathbf{B}_{k\omega} \right] \right) \times \\ \times \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Предположим, что равновесная сила \mathbf{F}_0 не зависит от скорости и является потенциальной:

$$\mathbf{F}_0 = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{e}{m} \mathbf{E}_0. \quad (1.18)$$

В этом случае решением (1.17) будет функция вида

$$f_0 = f_0(\varepsilon), \quad (1.19)$$

где $\varepsilon \equiv v^2/2 + \Phi_0$ имеет смысл энергии частицы единичной массы и является константой движения.

Если компоненты \mathbf{F}_0 по каким-либо из направлений отсутствуют, то функция f_0 может зависеть и от других интегралов движения. Здесь мы, однако, ограничимся рассмотрением только функций вида (1.19). Для таких f_0 входящая в (1.17) производная $\partial f_0/\partial \mathbf{v}$ имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (1.20)$$

Производная $\partial f_0/\partial \varepsilon$ — константа движения и поэтому может быть вынесена за знак интеграла по t' . Вследствие симметрии f_0 по скоростям член с возмущенным магнитным полем выпадает. В результате (1.17) сводится к следующему:

$$f = f(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) - \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int d\mathbf{k} d\omega \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega(t - t_0)\} \times \\ \times \mathbf{E}_{k\omega} \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau') \exp[i\omega(t - \tau')] - i\mathbf{k} \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau'') d\tau'' d\tau'. \quad (1.21)$$

В неоднородной плазме скорость частиц непостоянна — она изменяется под действием силы \mathbf{F}_0 . Будем считать, что изменение скорости частицы $\Delta \mathbf{v}$ за интересующий нас интервал времени $\Delta t = t - t_0$ мало по сравнению с $\mathbf{v}(t)$. В этом случае

$$\mathbf{v}(\tau') \approx \mathbf{v}(t) - (t - \tau') \mathbf{F}_0(t). \quad (1.22)$$

Полагаем также $\mathbf{k}\mathbf{F}_0(t - t_0)^2 \ll 1$. При этом условии член с \mathbf{F}_0 в экспоненте подынтегрального выражения (1.21) мал, так что эту экспоненту можно разложить в ряд по \mathbf{F}_0 . В результате (1.21) сводится к виду

$$f = f(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) + \int \exp\{-i\omega(t - t_0)\} f_\omega(\mathbf{E}) d\omega, \quad (1.23)$$

где

$$f_\omega(\mathbf{E}) = -\frac{ie}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \mathbf{E}_{k\omega} \times \\ \times \left[\frac{\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\mathbf{F}_0 \frac{1}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} - \frac{i(\mathbf{k}\mathbf{F}_0)\mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^3} \right]. \quad (1.24)$$

В случае одномерно-неоднородной плазмы ($F_{0z} \neq 0$, $F_{0x} = F_{0y} = 0$) силу \mathbf{F}_0 можно исключить с помощью вытекающего из (1.8) и (1.9) соотношения

$$F_{0z} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial f_0}{\partial z}. \quad (1.25)$$

В результате

$$f_\omega(\mathbf{E}) = -\frac{ie}{m} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \mathbf{E}_{k\omega} \times \\ \times \left\{ \frac{\mathbf{v} \partial f_0/\partial \varepsilon}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} + \frac{ie_z \partial f_0/\partial z}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + \frac{i\mathbf{v}k_z \partial f_0/\partial v_z}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^3} \right\} \quad (1.26)$$

(\mathbf{e}_z — единичный вектор).

Используем (1.26) для вычисления тока и заряда. Рассмотрим сначала одномерные потенциальные возмущения $\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$, $\mathbf{k}_\perp = 0$. Связанный с $f_\omega(\mathbf{E})$ возмущенный ток в этом случае равен

$$j_\omega \equiv e \int v_z f_\omega dv = \int \exp(ikz) E_{k\omega} \left[\sigma^{(0)}(z, k, \omega) - \frac{i}{2} \frac{d^2 \sigma^{(0)}}{dk dz} \right] dk. \quad (1.27)$$

Здесь $\sigma^{(0)}(z, k, \omega)$ — «локальная» проводимость;

$$\sigma^{(0)}(z, k, \omega) = \frac{ie^2 \omega}{m} \int \frac{f_0 dv}{(\omega - kv_z)^2}. \quad (1.28)$$

Выражение (1.27) можно также получить, исходя из общего соотношения между током и полем в неоднородной среде:

$$j_\omega(z) = \int \sigma \left(\omega, z - z', \frac{z + z'}{2} \right) E_\omega(z') dz'. \quad (1.29)$$

Неоднородность плазмы учитывается зависимостью σ от аргумента $(z + z')/2$. Предполагая эту зависимость слабой, представляем σ в виде ряда

$$\sigma \left(z - z', \frac{z + z'}{2} \right) = \sigma(z - z', z) + \\ + \frac{1}{2} (z' - z) \frac{\partial \sigma(z - z', z)}{\partial z} + \dots, \quad (1.30)$$

где $\partial/\partial z$ означает дифференцирование только по второму аргументу. Подставляя (1.30) в (1.29) и разлагая $E(z')$ и $\sigma(z-z')$ в интегралы Фурье, приходим к уравнению (1.27), в котором $\sigma^{(0)}(z, k, \omega)$ — фурье-компонента $\sigma(z-z')$.

Заметим, что связь между j и E можно было бы записать не в форме (1.29), а в виде

$$j_{\omega}(z) = \int \sigma(\omega, z-z', z) E_{\omega}(z') dz'. \quad (1.29')$$

В этом случае фурье-компонента $\sigma(\omega, z-z', z)$ по аргументу $z-z'$ не имеет, однако, смысла локальной проводимости (1.28) и отличается от последней слагаемым типа $\partial^2 \sigma^{(0)}/\partial k \partial z$.

Выражение для плотности заряда ρ одномерных потенциальных возмущений имеет вид

$$\rho_{\omega}(E) = -\frac{i}{4\pi} \int dk \exp(ikz) E_k \left\{ k(\epsilon_0^{(0)} - 1) - i \frac{\partial \epsilon_0^{(0)}}{\partial z} - i \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_0^{(0)}}{\partial z \partial k} \right\}, \quad (1.31)$$

где

$$\epsilon_0^{(0)} = 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{f_0(v, z) dv}{(\omega - kv)^2}. \quad (1.32)$$

Пусть теперь $k_{\perp} \neq 0$. Тогда возмущения, вообще говоря, не могут быть потенциальными. Будем, однако, считать $E \approx -\nabla \psi$. С помощью (1.26) находим, что плотность заряда в этом случае имеет вид, аналогичный (1.31):

$$\rho_{\omega} = -\frac{1}{4\pi} \int dk \exp(ikr) \psi_{k\omega} \left\{ k^2(\epsilon_0^{(0)} - 1) - ik_z \frac{\partial \epsilon_0^{(0)}}{\partial z} - i \frac{k_z k}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_0^{(0)}}{\partial z \partial k} \right\}. \quad (1.33)$$

Функция $\epsilon_0^{(0)}$ определена прежним соотношением (1.32).

Подставляя (1.33) в уравнение Пуассона, получаем уравнение для лаплас-компоненты потенциала $\psi_{k\omega}$

$$\int dk \exp(ikr) \psi_{k\omega} \left\{ k^2 \epsilon_0^{(0)} - ik_z \frac{\partial \epsilon_0^{(0)}}{\partial z} - i \frac{k_z k}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_0^{(0)}}{\partial z \partial k} \right\} = 4\pi \rho_{\text{ст}}(\omega, r). \quad (1.34)$$

Здесь в плотность сторонних зарядов $\rho_{\text{ст}}$ включена также лаплас-компонента начальной возмущенной плотности, обязанной члену $j(t_0, r_0, v_0)$ в уравнении (1.23).

§ 1.4. Пределы применимости приближения однородной плазмы в задачах об устойчивости

Пусть в некоторый момент времени в плазме возникает волновой пакет (см. § 4.4 т.1), размеры которого малы по сравнению с размерами неоднородности плазмы. В пренебрежении неоднородностью плазмы поведение пакета определяется уравнением баланса его энергии:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } S = 2\gamma_0 W. \quad (1.35)$$

Здесь W и S — энергия и поток энергии колебаний в точке r и в момент времени t . Они определены соотношениями:

$$W = \text{Re } \omega_0 \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0(\text{Re } \omega_0, k_0)}{\partial \text{Re } \omega_0} \frac{|E(r, t)|^2}{8\pi}; \quad (1.36)$$

$$S = -\text{Re } \omega_0 \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0}{\partial k} \frac{|E|^2}{8\pi} \equiv V_{\text{гр}} W; \quad (1.37)$$

$V_{\text{гр}} = (\partial \omega_k / \partial k)_{k=k_0}$ — групповая скорость волнового пакета, $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$, где k_0 — волновой вектор, соответствующий максимуму амплитуды пакета. Функция $\omega = \omega(k)$ соответствует решению дисперсионного уравнения

$$\epsilon_0[\omega(k), k] = 0. \quad (1.38)$$

Величина $\gamma_0 \equiv \gamma(k_0)$ — инкремент нарастания максимума амплитуды пакета; $\gamma(k) \equiv \text{Im } \omega(k)$.

Из уравнения (1.35) следует, что максимум амплитуды пакета перемещается в пространстве с групповой скоростью $V_{\text{гр}}$ и нарастает во времени с инкрементом γ ,

соответствующими среднему волновому числу пакета. Это относится к пакету, медленно нарастающему вследствие диссипативных эффектов. Более сложным является поведение «гидродинамически неустойчивого» пакета, для которого наряду с переносом и временным нарастанием важен также эффект распыливания (см. § 4.2 т. 1).

Выясним, насколько слабой должна быть неоднородность, чтобы картина поведения волнового пакета, полученная для однородной плазмы, оставалась в силе до тех пор, пока амплитуда пакета не нарастает до значений, существенно больших ее первоначальной величины.

Из (1.32) видно, что «локальная» диэлектрическая проницаемость неоднородной плазмы имеет такой же вид, как и в случае однородной плазмы. Различие состоит только в том, что теперь равновесная функция распределения f_0 зависит как от скоростей, так и от координат. Благодаря этому эффектами неоднородности можно пренебрегать до тех пор, пока волновой пакет не переместится на сколько-нибудь заметное расстояние в направлении неоднородности плазмы. Это справедливо только при $\mathbf{V}_0 = 0$, поскольку в противном случае (при $\mathbf{V}_0 \neq 0$) локальное ϵ_0 может содержать также члены с $\partial f_0 / \partial \mathbf{r}$, соответствующие обсуждаемым в § 4.2—4.6 градиентным эффектам.

Пусть L — характерный размер, на котором существенно меняются входящие в дисперсионное уравнение равновесные параметры. Пакет с групповой скоростью $V_{гр}$ проходит это расстояние за время $\tau \approx L/V_{гр}$. Это время должно в несколько раз превышать величину обратного инкремента, $\tau \gamma \gg 1$. Отсюда следует искомый критерий несущественности неоднородности плазмы:

$$\gamma \gg V_{гр}/L. \quad (1.39)$$

В качестве примера рассмотрим, что означает критерий (1.39) в случае неустойчивости, вызываемой «горячим» пучком в «холодной» плазме. Такая неустойчивость в приближении однородной плазмы рассматривалась в § 3.2 т. 1. Напомним, что эта неустойчивость описывается дисперсионным уравнением $\epsilon_0^{(0)} = 0$ (верхний индекс ноль у ϵ_0 , как и в § 1.3, означает часть диэлект-

рической проницаемости, учитываемую приближением однородной плазмы), причем

$$\epsilon_0^{(0)} = \text{Re } \epsilon_0^{(0)} + i \text{Im } \epsilon_0^{(0)}, \quad (1.40)$$

где

$$\text{Re } \epsilon_0^{(0)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 T_0}{m\omega^2} \right); \quad (1.41)$$

$$\text{Im } \epsilon_0^{(0)} = - \frac{4\pi^2 e^2}{mk^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (1.42)$$

Здесь обозначено: $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ — ленгмюровская частота плазмы; n_0 , T_0 — плотность и температура плазмы.

Уравнение $\text{Re } \epsilon_0^{(0)} = 0$ с $\text{Re } \epsilon_0^{(0)}$ вида (1.41) приводит к выражению для $\text{Re } \omega(\mathbf{k})$, определяемому соотношением

$$\text{Re } \omega(\mathbf{k}) = \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 d_0^2 \right), \quad (1.43)$$

где $d_0 = (T_0 / 4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ — дебаевский радиус для «холодной» плазмы.

Мнимая часть $\text{Im } \epsilon_0^{(0)}$, определенная соотношением (1.42), учитывает резонансное взаимодействие с ленгмюровскими колебаниями частиц пучка, а также частиц максвелловского хвоста «холодной» плазмы, так что f_0 — суммарная функция распределения этих двух групп быстрых частиц:

$$f_0 = f_{оп} + f_{опл} \quad (1.44)$$

и соответственно

$$\text{Im } \epsilon_0^{(0)} = (\text{Im } \epsilon_0^{(0)})_{п} + (\text{Im } \epsilon_0^{(0)})_{пл}. \quad (1.45)$$

Резонансное взаимодействие частиц с колебаниями приводит к нарастанию колебаний (если $\gamma_k > 0$) с инкрементом

$$\gamma_k = - \frac{\text{Im } \epsilon_0^{(0)}}{\partial \text{Re } \epsilon_0^{(0)} / \partial \omega_k}. \quad (1.46)$$

При максвелловском распределении частиц пучка около его средней скорости \mathbf{V} , т. е. при $f_{оп} \sim \exp[-m(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 / 2T_1]$,

$$(\text{Im } \epsilon_0^{(0)})_{п} = \frac{\sqrt{\pi} (\omega - k_z V)}{k^2 d_1^2 v_{T1}} \exp \left[- \left(\frac{\omega - k_z V}{k v_{T1}} \right)^2 \right], \quad (1.47)$$

где $v_{T1} = (2T_1/m)^{1/2}$; $d_1 = (T_1/4\pi e^2 n_1)^{1/2}$; T_1 , n_1 — температура и плотность пучка.

В пренебрежении резонансным взаимодействием колебаний с частицами максвелловского хвоста «холодной» плазмы и в предположении сильно нагретого пучка $V \approx v_{T1}$ из (1.46) и (1.47) следует оценка для инкремента нарастания колебаний:

$$\gamma \approx \alpha \omega_p, \quad (1.48)$$

где $\alpha \equiv n_1/n_0$ — отношение плотностей пучка и плазмы. Из (1.43) с учетом $kV \approx \omega_p$ следует оценка для групповой скорости колебаний:

$$V_{гр} \approx v_{T0}^2/V. \quad (1.49)$$

Учитывая (1.48), (1.49), находим, что критерий (1.39) несущественности неоднородности плазмы при раскачке колебаний «холодной» плазмы «горячим» пучком означает

$$L \gg d_0 v_{T0}/\alpha V. \quad (1.50)$$

Величина L может быть меньшей характерного размера неоднородности плазмы L_0 , если неустойчивость, приводящая к нарастанию волнового пакета, является резонансной, т. е. если она может развиваться только в узком интервале изменения равновесных параметров. Примером такой неустойчивости является рассмотренная в п. 2 § 1.5 т. 1 резонансная гидродинамическая неустойчивость пучка малой плотности с $\gamma \approx \alpha^{1/3} \omega_p$ и $V_{гр} \approx V$. Она имеет место, если только $|\omega - \omega_p|/\omega < \alpha^{1/3}$. Поэтому в качестве L в уравнение (1.39) следует подставлять размер, на котором плотность изменяется не на порядок, а только на малую долю порядка $\alpha^{1/3}$. В результате для рассматриваемой неустойчивости условие (1.39) примет вид

$$L_0 \gg V/\alpha^{1/3} \omega_p. \quad (1.51)$$

В отличие от этого при нерезонансной гидродинамической неустойчивости $\gamma \approx \alpha^{1/2} \omega_p$, $V_{гр} \approx V$ (см. п. 2 § 1.5 т. 1) $L \approx L_0$. Поэтому для нес критерий (1.39), несмотря на меньший инкремент, менее жесткий, чем (1.51):

$$L_0 \gg V/\alpha^{1/2} \omega_p. \quad (1.52)$$

§ 1.5. Волновой пакет в неоднородной плазме. Квазиклассическое приближение

При условии, обратном (1.39), возмущение, не успев дорасти до больших амплитуд, перемещается в область плазмы с существенно иными равновесными параметрами. В этом случае исследование возмущения следует проводить на основе уравнений, учитывающих неоднородность плазмы.

В потенциальном приближении возмущения слабонеоднородной плазмы описываются уравнением (1.34). Рассмотрим с помощью этого уравнения поведение волнового пакета в системе «холодная» плазма — «горячий» пучок. Представим $\epsilon_0^{(0)}$ в виде, аналогичном (1.40) — (1.42). Величины типа $k^2 \text{Re} \epsilon_0^{(0)}$, $k_z \partial \text{Re} \epsilon_0^{(0)} / \partial z$ под интегралом в (1.34) заменяем дифференциальными операторами, действующими на $\psi(\mathbf{r})$. Тогда уравнение (1.34) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} \tilde{L} \psi_\omega = & 3 \frac{T_0}{m} \frac{\omega_p^2}{\omega^4} \Delta^2 \psi_\omega - 6 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_0 \omega_p^2}{m \omega^4} \right) \Delta \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} + \bar{\epsilon}_0 \Delta \psi_\omega + \\ & + \frac{\partial \psi_\omega}{\partial z} \frac{\partial \bar{\epsilon}_0}{\partial z} + 4\pi \delta r(\psi_\omega) = -4\pi \rho_{ст}(\omega, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Здесь $\bar{\epsilon}_0 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, а $\delta r(\psi_\omega)$ учитывает резонансные частицы

$$4\pi \delta r(\psi_\omega) = -i \int dk \psi_{k\omega} \exp(ikr) k^2 \text{Im} \epsilon_0^{(0)}(\mathbf{k}, \omega, z). \quad (1.54)$$

Выражение для плотности зарядов «стороннего источника» принимаем в виде [ср. с (4.44) т. 1]

$$\rho_{ст}(\omega, \mathbf{r}) = \exp\{i\omega t_0 + i\mathbf{k}_0(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})\} q_0(z, t_0). \quad (1.55)$$

Предполагается, что функция $q_0(z)$ отлична от нуля на интервале Δz , большем по сравнению с обратным волновым числом $1/k_{0z}$, но малом по сравнению с характерным размером неоднородности плазмы. Источник предполагаем действующим только при некотором $t = t_0$ («мгновенный» источник, см. § 4.5 т. 1). Пространственная зависимость (1.55) соответствует волновому пакету (см. § 4.4 т. 1), локализованному на малом участке плазмы.

Нашей задачей является вычисление с помощью (1.53) лаплас-компоненты $\psi_\omega(\mathbf{r})$ и последующее нахождение функции $\psi(\mathbf{r}, t)$. Эту задачу удобно разделить на несколько этапов.

1. **Решение однородного уравнения, соответствующего (1.53).** Пусть правая часть (1.53) равна нулю, так что ψ_ω удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}\psi_\omega = 0. \quad (1.56)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\psi_\omega(\mathbf{r}) = A(z) \exp\{ik_\perp r_\perp + i \int^z K(z') dz'\}, \quad (1.57)$$

полагая, что характерный размер изменения функций $A(z)$, $K(z)$ порядка размера неоднородности плазмы L и намного превосходит характерное значение обратного «волнового числа» $K(z)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{K(z)} \frac{d \ln A}{dz} \ll 1; \quad \frac{1}{K(z)} \frac{d \ln K}{dz} \ll 1; \\ K(z)L \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

Предположение о слабой пространственной зависимости функций $K(z)$, $A(z)$ соответствует квазиклассическому приближению в квантовой механике, а в теории распространения света в неоднородной среде — приближению геометрической оптики. В дальнейшем этот подход будем называть квазиклассическим приближением.

В нулевом приближении по параметрам (1.58) из (1.56) получаем уравнение для $K(z)$:

$$\begin{aligned} 3 \frac{T_0}{m} \frac{\omega_p^2}{\omega^4} (k_\perp^2 + K^2)^2 - (k_\perp^2 + K^2) \varepsilon_0^{(0)} - \\ - i (k_\perp^2 + K^2) \text{Im} \varepsilon_0^{(0)}(K, z, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Это уравнение можно представить также в виде равенства нулю помноженного на k^2 локального скаляра диэлектрической проницаемости (1.32), в котором положено $k_z \equiv K(z)$:

$$(k_\perp^2 + K^2(z)) \varepsilon_0^{(0)}(K(z), z, \omega) = 0. \quad (1.60)$$

Соответствующие резонансным частицам мнимые члены уравнения (1.59) считаем малыми по сравнению с вещественными. В этом случае решения (1.59) имеют вид:

$$K_{1,2} = K_{1,2}^{(0)} + iK_{1,2}^{(1)}; \quad (1.61)$$

$$K_{3,4} = \pm i|k_\perp|, \quad (1.61')$$

где

$$K_{1,2}^{(0)} = \pm \left[\frac{m\omega^2}{3T_0} \left(\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1 \right) - k_\perp^2 \right]^{1/2}; \quad (1.62)$$

$$K_{1,2}^{(1)} = \frac{m\omega^4}{6T_0\omega_p^2 K_{1,2}^{(0)}} \text{Im} \varepsilon_0^{(0)}(K_{1,2}^{(0)}, z, \omega). \quad (1.62')$$

Обсудим смысл этих решений, полагая в последующих рассуждениях $\text{Im} \omega \ll \text{Re} \omega$.

При $(\omega_p^2 + 3k^2 T_0/m)^{1/2} > \text{Re} \omega$ корни $K_{1,2}$ соответствуют пространственно-осциллирующим возмущениям ($\text{Re} K \neq 0$) с тем или иным знаком фазовой скорости. Уравнение (1.62) можно понимать как закон изменения волнового числа ленгмюровских колебаний, распространяющихся в неоднородной плазме. Видно, что волновое число $K(z)$ растет с уменьшением плотности плазмы и, наоборот, уменьшается с увеличением плотности (для простоты полагаем температуру T_0 неизменной). Зависимость волнового числа от плотности качественно иллюстрируется рис. 1.1 и 1.2.

Уравнение (1.62') определяет скорость пространственного нарастания ленгмюровских колебаний (ср. с задачей об усилении волн, § 4.3 т. 1), обязанного взаимодействию с ними резонансных частиц. Предполагая, что резонансными являются только частицы пучка (а не плазмы), движущегося, скажем, в сторону положительных z , находим, что $\text{Im} \varepsilon_0^{(0)} \neq 0$ только для волн с $v_\phi(z) \equiv \omega/K(z) > 0$. Если распределение по скоростям в пучке является максвелловским, то для таких волн, согласно (1.47),

$$(\text{Im} \varepsilon_0^{(0)})_p = \frac{\sqrt{\pi} (\omega - K(z)V)}{[K^2(z) + k_\perp^2] d_{1\perp}^2 |k(z)| v_{T1}} \exp \left[- \left(\frac{\omega - K(z)V}{k(z)v_{T1}} \right)^2 \right]. \quad (1.63)$$

Здесь $k(z) = \sqrt{K^2(z) - k_{\perp}^2}$.

Из (1.62') и (1.63) следует, что волны с $v_{\phi} > 0$ будут пространственно-нарастающими при таких z , где $K(z) > \omega/V$ (в области меньшей плотности плазмы), и прост-

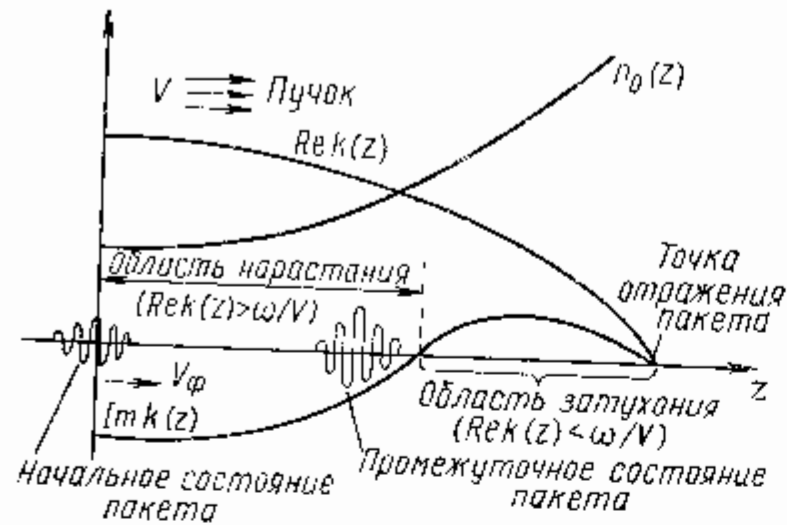


Рис. 1.1. Усиление пакета пучком, движущимся в сторону большей плотности плазмы

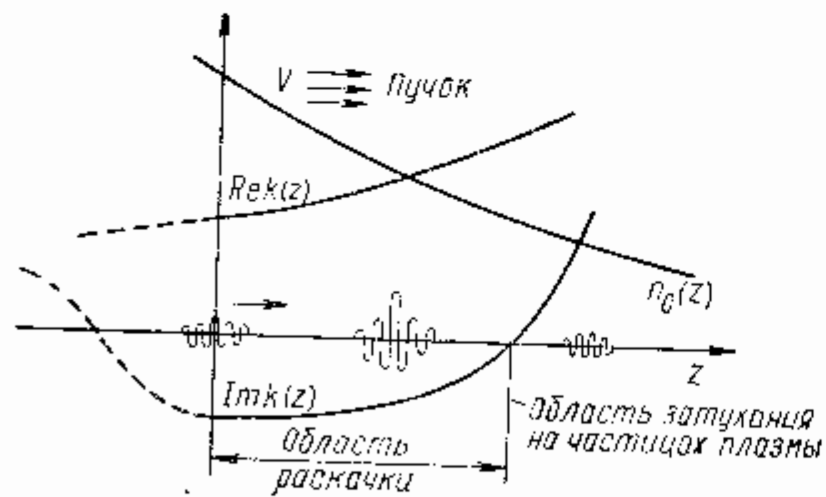


Рис. 1.2. Усиление пакета пучком, движущимся в сторону меньшей плотности плазмы

ранственно-затухающими при $K(z) < \omega/V$ (там, где плотность плазмы больше). Это также представлено на рис. 1.1 и 1.2.

Пренебрегать резонансными частицами «холодной» плазмы можно только на участках пространства, таких, где $K(z) \ll \omega/v_{T0}$. В противном случае вклад пучка в

$\text{Im} \epsilon_0^{(0)}$ окажется меньше вклада частиц холодной плазмы, равного

$$(\text{Im} \epsilon_0^{(0)})_{\text{пл}} = \frac{V \pi \omega \exp[-\omega^2/k^2(z) v_{T0}^2]}{(K^2 + k_{\perp}^2) d_0^2 |k(z)| v_{T0}} \quad (1.64)$$

Если волна распространяется из более плотной плазмы в менее плотную (см. рис. 1.2), то ее пространственное нарастание, обусловленное пучком, будет сменяться пространственным затуханием вследствие взаимодействия с резонансными частицами плазмы. Для волны, распространяющейся из разреженной плазмы в плотную, ситуация будет обратной: с ростом z волна из затухающей становится нарастающей (см. рис. 1.1). Что касается волн, распространяющихся против пучка, то они могут быть только пространственно-затухающими.

При z , таких, что $(\omega_p^2 + 3k_{\perp}^2 T_0/m)^{1/2} > \text{Re} \omega$, решения $K_{1,2}^{(0)}$ чисто мнимы. При вещественных ω им соответствует $\text{Im} \epsilon_0^{(0)} = 0$. Как будет показано ниже, эти решения описывают эффект непроникновения волн, распространяющихся в плазме с меньшей плотностью. Непроникаемым (evanescent) возмущениям соответствуют и не зависящие от координат решения типа (1.61').

В следующем приближении по параметрам (1.58) из (1.53) получаем выражение для $A(z)$:

$$A_{\alpha}(z) = C_{\alpha} \sqrt{K_{\alpha} \epsilon_0^{(0)}}; \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (1.65)$$

где C_{α} — произвольные константы. При вычислении $A_{1,2}$ мы пренебрегли малыми мнимыми членами в $K_{1,2}$, полагая $K_{1,2} \approx K_{1,2}^{(0)}$.

Уравнения (1.57), (1.61) — (1.62'), (1.65) определяют искомое решение однородного уравнения (1.56). Это решение справедливо не при всех z . Оно не имеет места в областях, где число резонансных частиц не слишком мало ($\text{Im} \epsilon_0^{(0)} \approx \text{Re} \epsilon_0^{(0)}$), а также вблизи точек $z = z^*$ и $z = z_0$, в которых соответственно $K_{1,2}^{(0)}(z^*) = 0$ и $\epsilon_0(z_0) = 0$. При $\text{Im} \epsilon_0^{(0)} \approx \text{Re} \epsilon_0^{(0)}$ становится несправедливым и само уравнение (1.56): в этом случае отброшенные при его получении производные более высоких порядков от ψ_{ω}

будут давать вклад, сравнимый с вкладом оставленных членов. При $z=z_0$ и $z=z^*$ уравнение (1.56) сохраняет силу, однако в этом случае оказываются нарушенными пределы применимости квазиклассического приближения (1.58). Это касается корней $K_{1,2}$ при $z=z^*$ и всех корней K при $z \approx z_0$.

2. Решение неоднородного уравнения. Решение (1.53) находим методом вариации постоянных. Полагаем

$$\psi_\omega(z) = \sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha(z, \omega) \exp \left\{ i \int^z K_\alpha(z, \omega) dz \right\}. \quad (1.66)$$

Функции $b_\alpha(z)$ находим, решая следующую систему уравнений, вытекающую из (1.53) и (1.66):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^4 K_\alpha^n \frac{\partial b_\alpha(z)}{\partial z} \exp \left\{ i \int^z K_\alpha(z', \omega) dz' \right\} &= 0; \quad n = 0, 1, 2; \\ \sum_{\alpha=1}^4 K_\alpha^3 \frac{\partial b_\alpha(z)}{\partial z} \exp \left\{ i \int^z K_\alpha(z', \omega) dz' \right\} &= -\frac{4\pi\rho_{\text{ст}}(\omega, r)}{3T_0\omega_p^2/m\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

В результате получаем

$$\psi_\omega(z) = \sum_{\alpha=1}^4 \int^z g_\alpha(z', \omega) \rho_{\text{ст}}(\omega, z') \exp \left\{ -i \int_z^{z'} K_\alpha(z'') dz'' \right\} dz', \quad (1.68)$$

где $g_\alpha(z, \omega)$ — некоторые плавные функции z .

3. Пространственно-временное поведение волнового пакета. С помощью (1.68) находим интересующую нас функцию $\psi(z, t)$:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \psi_\omega(z) \exp(-i\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} d\omega \exp\{-i\omega(t-t_0)\} \times \\ &\times \sum_{\alpha=1}^4 \int^z dz' g_\alpha(z', \omega) q_0(z', t_0) \exp \left[ik_0(z' - \bar{z}) - i \int_z^{z'} K_\alpha(z'') dz'' \right]. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Как и в (1.68), здесь пока не определены нижние пределы интегрирования по z' в членах суммы по α . Мы интересуемся поведением волнового пакета, возбужденного мгновенным источником $\rho_{\text{ст}}(z)$, отличным от нуля только на малом интервале Δz вблизи $z=\bar{z}$. В § 4.4 т. 1 в пренебрежении эффектами неоднородности плазмы было показано, что волновой пакет распространяется с групповой скоростью, соответствующей его среднему волновому числу. Будем предполагать, что сходная картина имеет место и при учете эффектов неоднородности, до тех пор пока пакет не достигнет точек z^* или z_0 . Тогда в (1.69) должны быть подставлены такие пределы интегрирования, чтобы учитывались только волны, «испускаемые» из области локализации источника.

Поскольку волне с одной и той же групповой скоростью может соответствовать как положительное, так и отрицательное значение $K(z)$ (в зависимости от знака $\text{Re } \omega$), то вместо $K_{1,2}(z)$ удобно ввести величины $K_\pm(z)$, определив их соотношениями

$$\left. \begin{aligned} K_+(z) &= \begin{cases} K_1, & \text{Re } \omega > 0; \\ K_2, & \text{Re } \omega < 0; \end{cases} \\ K_-(z) &= \begin{cases} K_2, & \text{Re } \omega > 0; \\ K_1, & \text{Re } \omega < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Групповая скорость волны K_+ положительна, а волны K_- — отрицательна.

С учетом этих замечаний выражение для $\psi(z, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} d\omega \exp[-i\omega(t-t_0)] \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^z dz' g_+(z', \omega) q_0(z', t_0) \exp \left\{ ik_0(z' - \bar{z}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \int_z^{z'} K_+ dz'' \right\} + \int_{-\infty}^z dz' g_-(z', \omega) q_0(z', t_0) \exp \left\{ ik_0(z' - \bar{z}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \int_z^{z'} K_- dz'' \right\} + \int_{-\infty}^z dz' g_3(z', \omega) q_0(z', t_0) \exp \left\{ ik_0(z' - \bar{z}) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-(z-z')|k_{\perp}| \} + \int_{-\infty}^z dz' g_{\pm}(z', \omega) q_0(z', t_0) \times \\ \times \exp \{ ik_0(z'-z) + (z-z')|k_{\perp}| \}. \quad (1.71)$$

Здесь функции g_{\pm} связаны с $g_{1,2}$ соотношениями, аналогичными (1.70).

4. **Пример гауссового пакета.** При анализе выражения (1.71) ограничимся случаем

$$q_0(z) \sim \exp \{ -(z-\bar{z})^2/2a_0^2 \}. \quad (1.72)$$

Согласно замечанию, сделанному после уравнения (1.57), $a_0|K_{\alpha}| \gg 1$. Будем также считать, что $|dK_{\alpha}/dz|a_0^2 \ll 1$. Тогда из (1.71) и (1.72) следует, что при $a_0 \ll |z-\bar{z}| < L$ потенциал имеет вид

$$\psi_{\pm}(z, t) \sim \exp \left\{ -i\omega(t-t_0) - i \int_{\bar{z}}^z K_{\pm}(\omega_0, z') dz' - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{V_{\text{гп}}^{(\pm)}(\bar{z}, \omega)}{a_0} \left(t-t_0 - \int_{\bar{z}}^z \frac{dz'}{V_{\text{гп}}^{(\pm)}(z', \omega_0)} \right) \right]^2 \right\}. \quad (1.73)$$

Здесь ψ_{+} обозначено решение в области $z-\bar{z} > 0$, а ψ_{-} — это ψ при $z-\bar{z} < 0$; ω_0 определено соотношением $k_0 = K_1(\bar{z}, \omega_0)$, т. е. ω_0 — это решение локального дисперсионного уравнения (1.60) с $K(z) = k_0$ и $z = \bar{z}$:

$$\epsilon_0^{(0)}(k_0, \bar{z}, \omega) = 0. \quad (1.74)$$

Локальная групповая скорость $V_{\text{гп}}^{(\pm)}(z, \omega_0)$ равна

$$V_{\text{гп}}^{(\pm)}(z, \omega_0) = [\partial K_{\pm}(\text{Re } \omega_0, z) / \partial \text{Re } \omega_0]^{-1}. \quad (1.75)$$

Из (1.73) следует, что из области локализации источника испускается (как в положительном, так и в отрицательном направлении) волновой пакет частоты $\omega = \text{Re } \omega_0$,

положение максимума которого определяется уравнением

$$t-t_0 - \int_{\bar{z}}^z \frac{dz'}{V_{\text{гп}}^{(\pm)}(z', \text{Re } \omega_0)} = 0. \quad (1.76)$$

Дифференцированием (1.76) по t находим, что координата центра пакета $z(t)$ изменяется по закону

$$dz(t)/dt = V_{\text{гп}}(z(t), \text{Re } \omega_0). \quad (1.77)$$

Этот результат является обобщением закона движения волнового пакета в однородной плазме [(4.31) т. 1)]. Соотношение (1.77) можно также получить из уравнения баланса энергии пакета в неоднородной плазме.

Вещественная и мнимая части $K_{\pm}(\omega_0, z)$ равны

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } K_{\pm}(\omega_0, z) &= \text{Re } K_{\pm}(\text{Re } \omega_0, z); \\ \text{Im } K_{\pm}(\omega_0, z) &= \text{Im } K_{\pm}(\text{Re } \omega_0, z) + \gamma_0/V_{\text{гп}}^{(\pm)}(\omega_0, z), \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

где [ср. с (1.46)]

$$\gamma_0 = \text{Im } \omega_0 = - \frac{\text{Im } \epsilon_0^{(0)}(k_0, \bar{z}, \text{Re } \omega_0)}{\partial \text{Re } \epsilon_0^{(0)}(k_0, \bar{z}, \text{Re } \omega_0) / \partial \text{Re } \omega_0}. \quad (1.79)$$

С помощью (1.73), (1.76) и (1.78) находим закон нарастания максимума модуля потенциала:

$$|\psi| \sim \exp \left[- \int_{\bar{z}}^{z(t)} \text{Im } K_{\pm}(z', \text{Re } \omega_0) dz' \right]. \quad (1.80)$$

Видно, что величина $-\text{Im } K(z)$ имеет смысл локального коэффициента усиления (ср. с § 4.5 т. 1).

Соотношение (1.80) можно представить также в виде

$$|\psi| \sim \exp \left\{ \int_{t_0}^t \gamma[z(t'), \omega_0] dt' \right\}, \quad (1.81)$$

где $z(t)$ определено уравнением (1.77), а $\gamma(z, \omega_0)$ — локальный инкремент, определяемый следующим образом:

$$\epsilon_0^{(0)}[\text{Re } K(z), z, \text{Re } \omega_0 + i\gamma(\bar{z})] = 0. \quad (1.82)$$

Локальный инкремент связан с локальным коэффициентом нарастания соотношением

$$\gamma(z) = -V_{гp}(z) \operatorname{Im} K(z). \quad (1.83)$$

§ 1.6. Неустойчивость потока с неоднородным профилем скорости. Метод поверхностных волн

Учет пространственной неоднородности плазмы приводит к выявлению новых типов неустойчивостей. Это иллюстрирует рассматриваемый ниже пример неустойчивости электронного потока с неоднородным профилем скорости. В пренебрежении неоднородностью такой поток устойчив.

Предполагаем, что поток движется вдоль оси z со скоростью $V_0 = (0, 0, V_0)$, зависящей от поперечной координаты x :

$$\partial V_0 / \partial x \neq 0. \quad (1.84)$$

Возмущения плотности и скорости такого потока определяются гидродинамическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega' n' + ik_z V_z' n_0 + ik_y V_y' n_0 + \frac{\partial}{\partial x} (n_0 V_x') &= 0; \\ -i\omega V_x' &= -\frac{e}{m} \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ -i\omega V_y' &= -i \frac{e}{m} k_y \psi; \\ -i\omega' V_z' + V_x' \frac{\partial V_0}{\partial x} &= -i \frac{e}{m} k_z \psi. \end{aligned} \right\} (1.85)$$

Здесь $\omega' = \omega - k_z V_0$, возмущения предполагаются потенциальными, $E = -\nabla \psi$. Возможно, что $\partial n_0 / \partial x \neq 0$, поэтому в первом из этих уравнений равновесная плотность оставлена под знаком производной. Находя отсюда возмущение плотности и подставляя его в уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - (k_z^2 + k_y^2) \epsilon_0 \psi = 0, \quad (1.86)$$

где

$$\epsilon_0 = 1 - \omega_p^2 / (\omega - k_z V_0)^2. \quad (1.87)$$

Рассмотрим с помощью уравнения (1.87) устойчивость потока, профиль скорости которого имеет вид

$$V_0(x) = \begin{cases} V_1, & x < 0; \\ V_2, & x > 0. \end{cases} \quad (1.88)$$

Предполагаем, что плотность потока аналогичным образом зависит от x :

$$n_0(x) = \begin{cases} n_1, & x < 0; \\ n_2, & x > 0. \end{cases} \quad (1.89)$$

Соотношения (1.88) и (1.89) означают, что скачок скорости и плотности происходит в слое толщиной a , малой по сравнению с поперечным размером потока.

Будем считать, что вдали от переходного слоя потенциал возмущения спадает по закону

$$\psi(x) = \psi_0 \exp(-\kappa |x|), \quad \kappa > 0 \quad (1.90)$$

и что ψ непрерывно при $x=0$. Это предполагает, что толщина переходного слоя мала по сравнению с масштабом спада потенциала:

$$\kappa a \ll 1. \quad (1.91)$$

Подставляя (1.90) в (1.86), находим

$$\kappa = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}. \quad (1.92)$$

Учитывая непрерывность ψ внутри переходного слоя, интегрируем обе части равенства (1.86) по слою. Пренебрегая членами порядка κa , получаем

$$\left(\epsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{-\delta}^{\delta} = 0, \quad (1.93)$$

где $a \ll \delta \ll 1/\kappa$. Подставляя (1.90) в (1.93), приходим к дисперсионному уравнению

$$2 - \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - k_z V_1)^2} - \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - k_z V_2)^2} = 0, \quad (1.94)$$

где $\omega_{p1,2}^2 = 4\pi e^2 n_{1,2} / m$.

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с дисперсионным уравнением для пучковой неустойчивости [ср. с (1.39) т. 1]. Физически различие между (1.39) т. 1 и (1.94) состоит в том, что первое описывает возмущения двух взаимопроникающих потоков, а второе — двух пространственно разделенных потоков.

Из (1.94) следует критерий неустойчивости, аналогичный (1.58) т. 1:

$$k_z V < \left[\left(\frac{\omega_{p1}^2}{2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\omega_{p2}^2}{2} \right)^{1/2} \right]^{3/2}, \quad V = V_2 - V_1. \quad (1.95)$$

В частности, если плотность по обе стороны границы одинакова ($n_1 = n_2 \equiv n_0$), то неустойчивость имеет место при [ср. с (1.41) т. 1]

$$k_z < 2\omega_{pe}/V. \quad (1.96)$$

Максимальный инкремент в этом случае соответствует возмущениям с

$$k_z = \sqrt{3/2} (\omega_{p0}/V). \quad (1.97)$$

Он равен

$$\gamma_{\max} = \omega_p/2\sqrt{2}. \quad (1.98)$$

Рассмотренную неустойчивость иногда называют неустойчивостью скользящих потоков (sleeping-stream instability).

§ 1.7. Неустойчивость электронного потока, ограниченного катодом и анодом.

Связь между элементарными типами возмущений в ограниченных системах

Пусть электронный поток с заданной плотностью n_0 и скоростью V_0 образуется в некоторой плоскости, перпендикулярной к направлению его скорости (катод), и поглощается в другой плоскости, отстоящей от первой на расстоянии L (анод). Потенциалы катода и анода предполагаем фиксированными. Полагаем, что в пространстве между катодом и анодом нет никаких других заряженных частиц, кроме частиц потока и компенсирующих их равновесный заряд бесконечно тяжелых ионов. В приближении бесконечного расстояния между катодом и анодом $L \rightarrow \infty$ поток устойчив. Покажем те-

перь, что при конечном L и не слишком малой плотности потока его равновесное состояние неустойчиво.

Рассмотрим возмущения с $k_x = 0$. Такие возмущения описываются следующей системой гидродинамических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega n' + V_0 \frac{\partial n'}{\partial z} + n_0 \frac{\partial V_z'}{\partial z} &= 0; \\ -i\omega V_z' + V_0 \frac{\partial V_z'}{\partial z} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 4\pi e n'. \end{aligned} \right\} \quad (1.99)$$

Полагая потенциалы катода и анода фиксированными, а скорость и плотность потока на катоде (в точке инъекции) заданными, получаем следующую совокупность граничных условий:

$$\psi(0) = \psi(L) = V_z'(0) = n'(0) = 0. \quad (1.100)$$

Общее решение системы (1.99) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A \exp\left(iz \frac{\omega - \omega_p}{V}\right) + B \exp\left(iz \frac{\omega + \omega_p}{V}\right) + Cz + D; \\ V_z' &= -\frac{e}{m\omega_p V} \left[A(\omega + \omega_p) \exp\left(iz \frac{\omega - \omega_p}{V}\right) - \right. \\ &\quad \left. - B(\omega - \omega_p) \exp\left(iz \frac{\omega + \omega_p}{V}\right) \right] + \frac{ie}{m\omega} C; \\ n' &= \frac{1}{4\pi e^2 V^2} \left[A(\omega + \omega_p)^2 \exp\left(iz \frac{\omega - \omega_p}{V}\right) + \right. \\ &\quad \left. + B(\omega - \omega_p)^2 \exp\left(iz \frac{\omega + \omega_p}{V}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.101)$$

С помощью (1.100) и (1.101) получаем систему четырех алгебраических уравнений для A, B, C, D . Приравняв нулю детерминант этой системы, дает следующее дисперсионное уравнение:

$$2\xi^2 \alpha (1 - e^{i\xi} \cos \alpha) + i(\xi^2 + \alpha^2) \sin \alpha e^{i\xi} + i \frac{\xi^2}{2} (\xi^2 - \alpha^2) = 0, \quad (1.102)$$

где $\xi = L\omega/V$; $\alpha = L\omega_p/V$.

Необходимо иметь в виду, что рассматриваемые колебания не чисто потенциальные. Условие приближенной потенциальности сводится к требованию, чтобы возмущенная плотность не обращалась всюду тождественно в нуль. Следствием этого и граничного условия $n'(0) = 0$ является то, что исходным предположениям удовлетворяют только корни $\xi^2 \neq \alpha^2$, т. е. $\omega^2 \neq \omega_p^2$.

Покажем, что частота колебаний, удовлетворяющая уравнению (1.102) и условию $n' \neq 0$, может иметь положительную мнимую часть, т. е. описываемые этим дисперсионным уравнением возмущения могут нарастать во времени. Заметим, что (1.102) имеет решение $\xi = 0$, если

$$\alpha \equiv \omega_p L/V = \alpha^{(n)} \equiv \pi n, \quad n = 1, 3, 5, \dots, (2k+1), \dots \quad (1.103)$$

Пусть теперь α несколько отличается от $\alpha^{(n)}$:

$$\alpha = \alpha^{(n)} + \alpha', \quad \alpha' \ll 1. \quad (1.104)$$

В этом случае $\xi \ll 1$, а частота колебаний чисто мнимая величина, так что $\text{Re } \omega = 0$,

$$\gamma = \omega_p^{(n)} \alpha' / 4, \quad (1.105)$$

где $\omega_p^{(n)}$ — плазменная частота при резонансных условиях (1.103). Видно, что $\gamma > 0$, если $\alpha' > 0$, поэтому неустойчивость имеет место при α , несколько больших резонансных. Если $\alpha \ll 1$, то решения (1.102), соответствующие $n' \neq 0$, отсутствуют. Поэтому неустойчивость возможна только при немалых значениях α ($\alpha > 1$), т. е. при

$$\omega_p \geq \pi V/L. \quad (1.106)$$

Оценку максимального инкремента можно получить с помощью (1.105), полагая в нем $\alpha' \approx 1$.

В пределе $\alpha \gg 1$ уравнение (1.106) не имеет решений с большим положительным $\text{Im } \xi$. Это означает, что при $\alpha \gg 1$ инкремент колебаний по порядку величины такой же, как и при $\alpha \approx \pi$, т. е.

$$\gamma \approx V/L, \quad (1.107)$$

Библиографический обзор к гл. 1

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963, § 46.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959, § 65.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960, § 23.
4. Стикс Т. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
В монографиях [1—4] обсуждаются распространения волн в неоднородных средах и приближения геометрической оптики (квазиклассическое приближение § 1.5).
5. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188. Обсуждается поведение волновых пакетов в неоднородной плазме (§ 1.5). Приводится выражение для диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы (§ 1.3).
6. Sturrock P. A. Excitation of plasma oscillations. — «Phys. Rev.», 1960, v. 117, p. 1246.
7. Горбатенко М. Ф. Взаимодействие электронного пучка с плазмой, находящейся в магнитном поле. — В кн.: Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1962, с. 39.
В работах [6, 7] рассматривается возбуждение колебаний плазмы радиально-неоднородным пучком.
8. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Неустойчивость в сильнонеоднородных пучках. — В кн.: Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Вып. «Взаимодействие пучков с плазмой». Киев, «Наукова думка», 1967, с. 31.
9. Fainberg Ya. B. Interaction of beams of charged particles with plasma. — «Czech. J. Phys.», 1968, v. 18B, p. 652. В работах [8, 9] можно найти обсуждение неустойчивостей продольно-неоднородного потока.
10. Pierce J. Limiting stable current in electron beams in the presence of ions. — «J. Appl. Phys.», 1944, v. 15, p. 721.
Здесь впервые рассматривалась неустойчивость потока, движущегося в пространстве между катодом и анодом (§ 1.7).

Глава 2

ПУЧКОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 2.1. Введение

Вопросы, исследуемые в данной главе, как и в предыдущей, касаются пучковых неустойчивостей. В отличие от гл. 1, здесь учитывается стационарное маг-

нитное поле. Наличие магнитного поля, как отмечалось в т. 1, существенно влияет на картину пучковых неустойчивостей. При этом обнаруживается большое число разновидностей пучковых неустойчивостей, отсутствующих в плазме без магнитного поля, как чисто электронных, так и электронно-ионных.

Проследивая в данной главе влияние пространственной неоднородности на пучковые неустойчивости плазмы в магнитном поле и выявляя разновидности пучковых неустойчивостей, специфичные для неоднородной плазмы в магнитном поле, мы вместе с тем подготавливаем основу для изучения градиентных неустойчивостей плазмы в магнитном поле.

В качестве исходных уравнений в данной главе используются некоторые уравнения, приводившиеся в т. 1, в частности гидродинамические уравнения (1.2), (1.3) т. 1 и линеаризованная система (1.10) т. 1 гидродинамических и электродинамических уравнений (уравнений Максвелла).

Основные обозначения, используемые в данной главе, те же, что и в т. 1 (см. также гл. 1 данного тома). В частности, ω_{pe} , ω_{pi} означают ленгмюровские частоты электронов и ионов; ω_{Be} , ω_{Bi} — их циклотронные частоты. При рассмотрении чисто электронных колебаний индекс e у ω_{pe} , ω_{Be} опускается.

Получаемые ниже физические результаты сопоставляются с соответствующими результатами приближения однородной плазмы, приведенными в т. 1.

§ 2.2. Раскачка собственных колебаний плазмы радиально-неоднородным электронным потоком

Если через плазму проходит пучок малой плотности, то можно выделить класс возмущений, частота которых определяется в основном свойствами плазмы (собственные колебания плазмы). Влияние пучка на такие колебания, приводящее к раскачке последних, можно исследовать методом последовательных приближений. В т. 1 были рассмотрены некоторые примеры раскачки пучком собственных колебаний плазмы в магнитном поле в предположении, что пучок и плазма безграничны и

пространственно-однородны. Теперь исследуем раскачку колебаний однородной ограниченной плазмы цилиндрической симметрии, пронизываемой пучком, плотность частиц которого — произвольная функция радиуса.

Исследование раскачки собственных колебаний ограниченной плазмы (путем решения задачи с граничными условиями) необходимо не только в случае, когда поперечная (по отношению к \mathbf{B}) длина волны возмущений сравнима с радиусом плазмы R , но и при $k_{\perp}R \gg 1$, если не выполнено условие локального приближения (1.35). При раскачке колебаний пучком малого радиуса $a_{\perp} \ll R$ роль длины l в формуле (1.35) играет радиус пучка a_{\perp} , а V_{gr} означает радиальную составляющую групповой скорости $\partial\omega/\partial k_r$.

Исследование собственных колебаний ограниченной плазмы не обязательно, если $a_{\perp} \gamma_{лок} \gg \partial\omega/\partial k_r$, и необходимо в противном случае.

1. **Холодный пучок.** Пусть через холодную цилиндрически-симметричную плазму проходит холодный цилиндрически-симметричный пучок, скорость частиц которого $\mathbf{V} = (0, 0, V)$ не зависит от радиуса, $\mathbf{V} = \text{const}$, $n_1 = n_1(r)$. Рассмотрим потенциальные возмущения такой системы, предполагая их аксиально-симметричными, $\partial/\partial\varphi = 0$ (φ — полярный угол). При указанных предположениях уравнение Пуассона принимает вид

$$(\tilde{L}_0 + \tilde{L}_1)\psi = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$\tilde{L}_{\alpha}\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \epsilon_{\perp}^{(\alpha)} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - k_z^2 \epsilon_{\parallel}^{(\alpha)} \psi, \quad \alpha = 0, 1; \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\perp}^{(0)} &= 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 - \omega_B^2}; & \epsilon_{\parallel}^{(0)} &= 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2}; \\ \epsilon_{\perp}^{(1)} &= -\omega_{p1}^2 / (\omega - k_z V)^2 - \omega_B^2; \\ \epsilon_{\parallel}^{(1)} &= -\omega_{p1}^2 / (\omega - k_z V)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1) можно получить, исходя из соотношения

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (2.4)$$

и используя далее формулы $D_{ik} = \epsilon_{ik} E_k$, $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ и соответствующие выражения для тензора ϵ_{ik} (см., например, § 5.1 т. 1).

Для определенности будем считать, что при $r=R$ плазма граничит с идеально проводящим металлическим кожухом, потенциал которого фиксирован. Тогда граничное условие для потенциала возмущения при $r=R$ будет иметь простой вид $\psi(R)=0$.

Полагая в уравнении (2.1) члены с \widehat{L}_1 малыми, решаем его методом последовательных приближений. Потенциал и частоту колебаний представляем в виде

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}; \quad \omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}, \quad (2.5)$$

где $\psi^{(0)}$, $\omega^{(0)}$ — собственные функции и собственные значения уравнения

$$\widehat{L}_0(\omega^{(0)}) \psi^{(0)} = 0 \quad (2.6)$$

с граничными условиями: $\psi^{(0)}(R)=0$; $\psi^{(0)}(0)$ — конечно. Добавки $\psi^{(1)}$, $\omega^{(1)}$ определяются уравнением

$$\widehat{L}_0(\omega^{(0)}) \psi^{(1)} = - \left\{ \omega^{(1)} \frac{\partial \widehat{L}_0(\omega^{(0)})}{\partial \omega^{(0)}} \psi^{(0)} + \widehat{L}_1(\omega^{(0)}) \psi^{(0)} \right\}. \quad (2.7)$$

Величину $\omega^{(1)}$ находим из условия ортогональности правой части (2.7) решению нулевого приближения. Это условие имеет вид

$$\omega^{(1)} \int \psi^{(0)*} \frac{\partial \widehat{L}_0(\omega^{(0)})}{\partial \omega^{(0)}} \psi^{(0)} dr + \int \psi^{(0)*} \widehat{L}_1(\omega^{(0)}) \psi^{(0)} dr = 0 \quad (2.8)$$

Если \widehat{L}_1 не имеет особенности при $\omega = \omega^{(0)}$, то в выражении для него можно пренебречь $\omega^{(1)}$ по сравнению с $\omega^{(0)}$. В этом случае добавка к собственному значению частоты имеет обычный в теории возмущений вид

$$\omega^{(1)} = - \frac{\int \psi^{(0)*} \widehat{L}_1(\omega^{(0)}) \psi^{(0)} dr}{\int \psi^{(0)*} \frac{\partial \widehat{L}_0(\omega^{(0)})}{\partial \omega^{(0)}} \psi^{(0)} dr}. \quad (2.9)$$

Нас здесь, однако, будет интересовать случай, когда добавка $\omega^{(1)}$ в операторе \widehat{L}_1 существенна (ср. с аналогич-

ной ситуацией в п. 2 § 1.5 и § 7.1 т. 1). Подставляя в (2.8) конкретные выражения для \widehat{L}_0 , \widehat{L}_1 [см. уравнения (2.2) и (2.3)], приводим его к виду

$$\omega^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_0^{(0)}(\omega^{(0)})}{\partial \omega^{(0)}} + \varepsilon_{3\Phi}^{(1)} = 0, \quad (2.10)$$

где

$$\varepsilon_{3\Phi}^{(1)} = - \frac{\alpha_{\parallel} (\omega p_{\parallel} \cos \theta)^2}{(\omega - k_z V)^2} - \frac{\alpha_{\perp} (\omega p_{\perp} \sin \theta)^2}{(\omega - k_z V)^2 - \omega_B^2}. \quad (2.11)$$

Здесь

$$\theta = \arctg(k_{\perp}/k_z); \quad \varepsilon_0^{(0)} = \varepsilon_{\perp}^{(0)} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel}^{(0)} \cos^2 \theta; \quad (2.12)$$

$$\alpha_{\parallel} = \frac{\int n_1(r) |\psi^{(0)}|^2 dr}{n_0 \int |\psi^{(0)}|^2 dr}; \quad \alpha_{\perp} = \frac{\int n_1(r) |\nabla_{\perp} \psi^{(0)}|^2 dr}{k_{\perp}^2 n_0 \int |\psi^{(0)}|^2 dr};$$

$\psi^{(0)} = C J_0(k_{\perp} r)$; J_0 — функция Бесселя.

Частота нулевого приближения $\omega^{(0)}$ удовлетворяет условию $\varepsilon_0^{(0)}(\omega^{(0)}) = 0$, а «поперечное волновое число» k_{\perp} определяется условием

$$J_0(k_{\perp} R) = 0. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.10) описывает гидродинамические неустойчивости, обсуждавшиеся в § 7.1 и 7.2 т. 1. Различие состоит только в том, что теперь вместо отношения плотностей пучка и плазмы α в дисперсионное уравнение входит его усредненное значение.

В качестве примера рассмотрим пучок с гауссовским распределением плотности:

$$n_1(r) = N \exp(-r^2/a^2). \quad (2.14)$$

В этом случае из (2.12) находим

$$\alpha_{\parallel} = \alpha_0 \frac{a^2}{R^2} \frac{I_0(v) e^{-v}}{J_1^2(k_{\perp} R)}; \quad \alpha_{\perp} = \alpha_0 \frac{a^2}{R^2} \frac{I_1(v) e^{-v}}{J_1^2(k_{\perp} R)}. \quad (2.15)$$

Здесь $\alpha_0 = N/n_0$ — отношение плотности пучка и плазмы при $r=0$; $v = (k_{\perp} a)^2/2$; I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента.

С помощью (2.15) получаем, что при $k_{\perp} a \gg 1$ инкремент черенковской раскачки колебаний гауссовским пучком определяется соотношением

$$\gamma/\gamma_0 \approx (a/R)^{1/2}, \quad (2.16)$$

где γ_0 — инкремент, соответствующий пространственно-однородному пучку. Выражение для γ_0 определено формулой (7.10) т. 1, а в предельных случаях больших и малых ω_p/ω_B — формулами (7.12), (7.24) и (7.34) т. 1.

Аналогично при циклотронной раскачке ($\omega = k_z V - \omega_B$) имеем

$$\gamma/\gamma_0 \approx (a/R)^{1/2}, \quad (2.17)$$

где γ_0 определяется формулой (7.17) либо (7.19), (7.27) и (7.30) т. 1.

2. Неоднородный пучок с продольным тепловым разбросом. Выражение (2.11) обобщается на случай пучка с продольным тепловым разбросом способом, указанным в задаче § 2.1 т. 1. При этом

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{эф}}^{(1)} = & -\alpha_{\parallel} \omega_p^2 \cos^2 \theta \int \frac{F_1 dv_z}{(\omega - k_z v_z)^2} - \\ & -\alpha_{\perp} \omega_p^2 \sin^2 \theta \int \frac{F_1 dv_z}{(\omega - k_z v_z)^2 - \omega_{j\beta}^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь $F_1 \equiv F(r, v_z)/n_1(r)$ — нормированная на единицу функция распределения пучка (предполагается, что F_1 не зависит от r); отношения эффективных плотностей a_{\parallel} , a_{\perp} определяются формулами (2.12).

С помощью (2.18) и (2.10) находим, что гидродинамические неустойчивости с инкрементами (2.16) и (2.17) возможны, если только тепловой разброс пучка удовлетворяет соответственно условиям:

$$v_{T1}/V < (\alpha_0 a/R)^{1/2}; \quad (2.19)$$

$$v_{T1}/V < (\alpha_0 a/R)^{1/2}. \quad (2.20)$$

В противном случае неустойчивость пучка в плазме — кинетическая. По порядку величины ее инкремент определяется соотношением

$$\gamma/\gamma_0 \approx a/R, \quad (2.21)$$

где γ_0 — инкремент в случае пространственно-однородного пучка той же плотности, найденный в § 7.3 т. 1.

§ 2.3. Пороги пучковых неустойчивостей в ограниченной плазме, находящейся в сильном магнитном поле

Согласно § 7.2 т. 1, в случае сильного магнитного поля $\omega_B \gg \omega_p$ пучковые неустойчивости можно разделить на длинноволновые $k \lesssim \omega_p/V$ и коротковолновые $k \approx \omega_B/V$. Наибольшим инкрементом обладают длинноволновые неустойчивости. Они же наименее чувствительны к тепловому разбросу частиц. Поэтому такие неустойчивости наиболее важны. Длинноволновые неустойчивости не могут, однако, развиваться при слишком малой плотности плазмы, поскольку вследствие пространственной ограниченности плазмы при малом ω_p не выполняется условие неустойчивости $k \lesssim \omega_p/V$. Последнее неравенство приводит к следующему ограничению на плотность плазмы:

$$n_0 > \frac{V^2}{4\pi e^2} (k_{\perp}^2 + k_z^2). \quad (2.22)$$

В наиболее важном случае плазмы с $L \gg a$ это означает

$$n_0 > \frac{V^2}{4\pi e^2} k_{\perp}^2. \quad (2.23)$$

Рассмотрим теперь, что должно подставляться сюда вместо k_{\perp}^2 в случае цилиндрически-симметричной плазмы.

1. Плазма ограничена проводящим кожухом. Пусть R — радиус плазмы. Тогда k_{\perp} определяется из условия $J_0(k_{\perp} R) = 0$. Нас интересуют наименьшие из возможных k_{\perp} . Этому соответствует первый нуль функции Бесселя. Таким образом,

$$k_{\perp \text{ мин}} = 2,4/R, \quad (2.24)$$

так что граничная плотность неустойчивой плазмы (2.23) в этом случае равна

$$n_{0 \text{ гран}} = (2,4/R)^2 (V^2/4\pi e^2). \quad (2.25)$$

2. Плазма граничит с вакуумом при $r=a$, металлический кожух находится при $r=R \gg a$, длина плазмы больше радиуса кожуха ($L \gg R$). Выражение для k полу-

часом, сшивая при $r=a$ решение для потенциала возмущения в плазме

$$\psi_1 = C_1 J_0(k_\perp r) \quad (2.26)$$

с решением вне плазмы

$$\psi_2 = C_2 K_0(k_z r) + C_3 I_0(k_z r). \quad (2.27)$$

При сшивке используем граничные условия:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a); \quad \psi_1'(a) = \psi_2'(a); \quad \psi_2(R) = 0. \quad (2.28)$$

В результате находим, что в (2.23) необходимо подставить k_\perp^2 в виде

$$k_\perp^2 = 2/a^2 \ln \frac{R}{a}. \quad (2.29)$$

Приведенные выше результаты относятся к случаю лучка малой плотности $n_1 \ll n_0$. При $n_1 > n_0$ в (2.23) должна быть сделана замена:

$$n_0 \rightarrow (n_0^{1/3} + n_1^{1/3})^3. \quad (2.30)$$

§ 2.4. Электронный поток с неоднородным профилем скорости в продольном магнитном поле

Пусть электронный пучок со скачкообразным профилем скорости ($\nabla V \parallel \mathbf{x}$), обсуждавшийся в § 1.6, находится в магнитном поле $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{V} \parallel \mathbf{z}$. Покажем, что существует некоторое критическое значение магнитного поля, при котором происходит стабилизация потока относительно возмущений с $k_y = 0$. (Возмущения с $k_y \neq 0$ рассматриваются ниже, в § 4.2.)

При $k_y = 0$ и произвольных ω/ω_B уравнение Пуассона приводится к следующему дифференциальному уравнению для ψ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_\perp \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - k_z^2 \epsilon_\parallel \psi = 0, \quad (2.31)$$

где

$$\epsilon_\perp = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z V)^2 - \omega_B^2}; \quad \epsilon_\parallel = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z V)^2}. \quad (2.32)$$

Как и в § 1.6, предполагаем, что скорость и плотность потока при каком-либо $x=x_0$ скачком изменяются от значений V_1, n_1 до V_2, n_2 . Рассмотрим устойчивость такого потока по отношению к возмущениям типа поверхностных волн (локализованных вблизи границы раздела).

Таким же путем, как и в § 1.6, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\sqrt{\epsilon_\perp^{(1)} \epsilon_\parallel^{(1)}} + \sqrt{\epsilon_\perp^{(2)} \epsilon_\parallel^{(2)}} = 0. \quad (2.33)$$

Будем считать плотности по обе стороны разрыва одинаковыми $n_2 = n_1$, а систему отсчета выберем такой, в которой $V_2 = -V_1$. Тогда из (2.33) вытекает биквадратное уравнение для ω :

$$\omega^4 - \omega^2 [2(k_z V)^2 + \omega_p^2 + \omega_B^2] + (k_z V)^4 - (k_z V)^2 (\omega_p^2 + \omega_B^2) + \frac{1}{2} \omega_B^2 (\omega_p^2 + \omega_B^2) = 0. \quad (2.34)$$

Из (2.34) следует, что неустойчивость, рассмотренная в § 1.6, имеет место только при

$$\omega_p > \omega_B. \quad (2.35)$$

В противном случае уравнение (2.33) не имеет решений не только с $\text{Im} \omega > 0$, но и вообще никаких. Это означает, что электронные поверхностные волны с $k_y = 0$ существуют только в достаточно слабом магнитном поле.

§ 2.5. Раскачка альфвеновских волн в плазме с неоднородным профилем скорости (неустойчивость типа Кельвина—Гельмгольца)

1. Электродинамическое рассмотрение. Пусть электроны и ионы плазмы движутся вдоль магнитного поля с одинаковой скоростью \mathbf{V}_0 , профиль которой неоднороден, $dV_0(x)/dx \neq 0$. Будем считать температуру частиц достаточно малой, столкновениями между частицами пренебрежем. Возмущения плотности и скорости электронов и ионов в этих условиях можно найти из уравнений двухжидкостной гидродинамики:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n'}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{V}') - \operatorname{div}(n' \mathbf{V}_0) &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial r} + (\mathbf{V}' \nabla) \mathbf{V}_0 &= \frac{e}{m} \mathbf{E}' + [\mathbf{V}', \boldsymbol{\omega}_{pi}] + \\ &+ \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_0, \mathbf{B}']. \end{aligned} \right\} (2.36)$$

Предполагая возмущения низкочастотными $|\omega - k_z V_0| \ll \omega_{pi}$ и длинноволновыми $\partial/\partial x \ll \omega_{pi}/c$, с помощью (2.36) получаем уравнения для возмущенных полей

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E})_\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_\alpha, \quad \alpha = (x, y), \quad (2.37)$$

где

$$\epsilon = \frac{\omega_{pi}^2(x)}{\omega_{pi}^2} \left(1 - \frac{k_z V_0(x)}{\omega} \right)^2. \quad (2.38)$$

В случае однородной плазмы уравнение (2.37) описывает альфвеновские и быстрые магнитно-звуковые волны. При $V_0 \neq 0$ такие волны имеют закон дисперсии:

$$\left. \begin{aligned} \omega = k_z V_0 = \pm |k_z| c_A; \\ \omega - k_z V_0 = \pm k c_A, \end{aligned} \right\} (2.39)$$

где $k = (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$, $c_A = c \omega_{pi} / \omega_{pi}$. При наличии неоднородности скорости либо плотности возмущения этих двух типов оказываются связанными друг с другом и в соответствии с (2.37) описываются следующим дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_z^2 - \omega^2 \epsilon / c^2}{k_y^2 + k_z^2 - \omega^2 \epsilon / c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E_y = 0. \quad (2.40)$$

Это уравнение можно упростить при малых k_z/k_y , когда волны (2.39) обладают существенно различной частотой. Тогда можно снова говорить о волнах альфвеновского и магнитно-звукового типов. Для первых из них $\epsilon \ll (ck/\omega)^2$, так что их электрическое поле, как следует из (2.40), удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] - k_y^2 \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E_y = 0. \quad (2.41)$$

Аналогичное уравнение можно написать для волн магнитно-звукового типа. Для этого в (2.40) надо пренебречь членами k_z^2 по сравнению с $(\omega/c)^2 \epsilon$.

Ниже нас будут интересовать только возмущения альфвеновского типа: благодаря своей малой частоте они могут раскачиваться из-за градиента V_0 .

Рассмотрим простейший случай скачкообразного профиля скорости (и скачкообразного профиля плотности, если имеется градиент плотности). Следуя методу поверхностных волн (см. § 1.6), находим дисперсионное уравнение для возмущений, локализованных в окрестности скачка:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2c^2 k_z^2 / \omega^2 = 0. \quad (2.42)$$

Индексы 1 и 2 означают, что величина (2.38) берется по разные стороны скачка.

Уравнение (2.42) сходно с дисперсионным уравнением для альфвеновских волн в системе двух взаимопроникающих однородных плазм с различными продольными скоростями (см. т. 1, § 18.9). Это обстоятельство отражает сходство физических процессов в этих двух классах плазмы. Такое же сходство имеет место между пучковыми неустойчивостями в системе взаимопроникающих и пространственно-разделенных электронных потоков (см. соответственно § 1.5 т. 1 и § 1.6, 2.4 данного тома). Механизм раскачки колебаний в рассматриваемом случае, однако, отличен от обычного пучкового: в основе его лежит электромагнитное взаимодействие между электрическим полем и токами в плазме.

Результаты, вытекающие из дисперсионного уравнения (2.42), аналогичны приведенным в § 18.9 т. 1. В частности, если $\nabla n_0 = 0$, то имеет место неустойчивость при

$$|V_1 - V_2| > 2c_A. \quad (2.43)$$

2. Гидродинамическое рассмотрение. Из уравнений (2.37) можно исключить электрическое поле, и тогда задача о раскачке альфвеновских волн сводится к анализу уравнений одножидкостной гидродинамики. Именно такая постановка этой задачи наиболее распространена.

Чтобы перейти к одножидкостной гидродинамике, несколько преобразуем уравнения (2.36). Из электронного уравнения движения (или из ионного) в нулевом приближении по ω/ω_B находим связь между возмущенной скоростью и электрическим полем:

$$\mathbf{V}' = \frac{c[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]}{B_0} \left(1 - \frac{k_z V_0}{\omega}\right). \quad (2.44)$$

Введем смещение плазмы ξ , определив его соотношением $d\xi/dt = \mathbf{V}'$, т. е.

$$\xi = i\mathbf{V}'/(\omega - k_z V_0) \equiv i[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]/B_0\omega. \quad (2.45)$$

Возмущенное магнитное поле связано с ξ соотношением $\mathbf{V}' = \text{rot}[\xi, \mathbf{B}_0]$, что при $\mathbf{B}_0 = \text{const}$ означает

$$\mathbf{V}' = ik_z B_0 \xi - \mathbf{B}_0 \text{div} \xi. \quad (2.46)$$

Используя (2.45) и (2.46), в первом приближении по ω/ω_B из (2.36) получаем искомое уравнение для смещения ξ :

$$-\rho_0 \omega'^2 \xi = \frac{B_0^2}{4\pi} \nabla \text{div} \xi - \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi} \xi; \quad \omega' \equiv \omega - k_z V_0. \quad (2.47)$$

Покажем теперь, как отсюда можно получить результат, аналогичный (2.41). Полагаем в (2.47) члены с ω'^2 и k_z^2 малыми. Пренебрегая этими членами, из (2.47) получаем условие несжимаемости:

$$\text{div} \xi = 0. \quad (2.48)$$

Это условие дает связь между компонентами ξ_x и ξ_y , так что

$$\xi_y = (i/k_y) \partial \xi_x / \partial x. \quad (2.49)$$

Еще одну связь между ξ_x и ξ_y получаем, взяв rot_z от обеих частей равенства (2.47):

$$\text{rot}_z \left[(\rho_0 \omega'^2 - k_z^2 B_0^2 / 4\pi) \xi \right] = 0. \quad (2.50)$$

Исключая отсюда с помощью (2.49) ξ_y , находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho_0 \omega'^2 - \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi} \right) \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right] - k_y^2 \left(\rho_0 \omega'^2 - \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi} \right) \xi_x = 0. \quad (2.51)$$

Учитывая второе равенство (2.45), приходим к выводу о полной тождественности уравнений (2.51) и (2.41).

Неустойчивость, описываемая уравнением (2.51), называется в магнитной гидродинамике неустойчивостью типа Кельвина—Гельмгольца.

Библиографический обзор к гл. 2

1. Горбатенко М. Ф. Взаимодействие электронного пучка с плазмой, находящейся в магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1963, т. 33, с. 1070.
2. Михайловский А. Б., Юнгвирт К. О роли конвективных эффектов при возбуждении электронных колебаний плазмы ограниченным пучком. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 777.
3. Кислов В. Я., Богданов Е. В. Взаимодействие медленных плазменных волн с потоком электронов. — «Радиотехника и электроника», 1960, т. 5, с. 1974.
В работах [1—3] исследуются неустойчивости электронных пучков конечных размеров (§ 2.2, 2.3).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
5. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. London, Oxford Univ. Press, 1962.
В книгах [4, 5] излагается теория неустойчивости типа Кельвина—Гельмгольца (§ 2.5).
6. Jungwirth K. Plasma instabilities excited by an azimuthal electron beam. — «Czech. J. Phys.», 1968, v. 18, p. 629.
7. Burt P., Harris E. G. Unstable cyclotron oscillations in a cylindrical plasma shell. — «Phys. Fluids», 1961, v. 4, p. 1412.
8. Jungwirth K. Instabilities of plasma with intense azimuthal streams. — «Plasma Phys.», 1968, v. 10, p. 374.
9. Пистунович В. И. Циклотронная неустойчивость плазмы в «Огре» — «Атомная энергия», 1963, т. 14, с. 72.
10. Shima Ya., Fowler T. K. Flute instabilities at ion gyrofrequency. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2245.
В работах [6—10] исследуются неустойчивости азимутальных потоков.

Глава 3

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЫ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОНУСНЫЕ И АНИЗОТРОПНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 3.1. Введение

Роль неоднородности плазмы и магнитного поля в задачах о конусных и анизотропных неустойчивостях исследовалась в большом числе теоретических

работ. Интерес к этому вопросу объясняется потребностями проблемы создания термоядерных реакторов на основе адиабатических ловушек.

Ниже мы коснемся только некоторых вопросов теории конусных неустойчивостей неоднородной плазмы. Более полное представление о результатах этого раздела теории плазменных неустойчивостей можно составить, обратившись к работам, отмеченным в библиографическом обзоре к данной главе.

§ 3.2. Высокочастотная конусная неустойчивость плазмы конечной длины

1. **Постановка задачи.** В § 12.1 т. 1 была рассмотрена высокочастотная конусная неустойчивость однородной плазмы, которая в простейшем случае холодных электронов и δ -функционального поперечного распределения ионов $f_{0i} \sim \delta(v_{\perp}^2 - v_0^2)$ описывается дисперсионным уравнением

$$\epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta + \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta = 0, \quad (3.1)$$

где $\theta = \arccos(k_z/k)$;

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\parallel} &= 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2; \\ \epsilon_{\perp} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pi}^2} - \frac{i\omega_{pi}^2 \omega}{(k_{\perp}^2 v_0^2 + \omega^2)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Эта неустойчивость характеризуется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &\approx \gamma \approx \omega_{pi} (1 + b_e)^{-1/2}; \\ k_{\perp} &\approx d_0^{-1} (1 + b_e)^{-1/2}; \\ k_z &\approx (m_e/m_i)^{1/2} k_{\perp}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где $b_e = (\omega_{pe}/\omega_{pi})^2$; $d_0 = v_0/\omega_{pi}$.

Теперь рассмотрим высокочастотную конусную неустойчивость в плазме конечной длины с плотностью, неоднородной по длине.

Приняв, что плотность плазмы зависит от z , методом § 1.5 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dz} \left(\epsilon_{\parallel} \frac{d\psi}{dz} \right) - k_{\perp}^2 \epsilon_{\perp} \psi = 0, \quad (3.4)$$

где ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} определяются соотношениями (3.2). Отсюда в предельных случаях резкого и плавного спада плотности вытекают результаты, излагаемые ниже, в п. 2 и 3.

2. **Плазма с резким спадом плотности.** Пусть плазма однородна при $|z| < L/2$ и пусть ее плотность скачком падает до нуля при $|z| = L/2$. Решение (3.4) при $|z| < L/2$ имеет вид

$$\psi = C \cos(k_z z + \alpha), \quad (3.5)$$

где

$$k_z^2 = -\epsilon_{\perp} k_{\perp}^2 / \epsilon_{\parallel}, \quad (3.6)$$

а C и α — некоторые константы.

При $\omega_{pe} \gg \omega$ граничное условие для потенциала ψ имеет вид

$$\psi'(L/2) = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует дисперсионное уравнение

$$(\pi n/L)^2 \epsilon_{\parallel} + k_{\perp}^2 \epsilon_{\perp} = 0, \quad (3.8)$$

совпадающее с (12.1) т. 1 при замене

$$k_z \leftrightarrow \pi n/L. \quad (3.9)$$

Используя аналогию (3.8) с (12.1) т. 1, находим оценку на длину неустойчивой плазмы:

$$L \approx \pi \begin{cases} \rho_i & \text{при } \omega_{pe} > \omega_{pe}; \\ (m_i/m_e)^{1/2} d_0 & \text{при } \omega_{pe} < \omega_{pe}. \end{cases} \quad (3.10)$$

3. **Плазма с плавным спадом плотности.** Предполагаем, что плазма находится в ловушке, длина которой велика по сравнению с длиной, определяемой правой частью (3.10). Тогда на длине плазмы уложится много длин волн. Будем считать, что плотность плазмы меняется плавно на расстоянии одной длины волны и

что резкого скачка плотности на концах ловушки, в отличие от п. 2, нет. Решение (3.4) можно тогда искать в квазиклассическом виде $\psi \sim \exp[i \int K_z(z) dz]$. Для $K_z(z)$ получится выражение, аналогичное (3.6):

$$K_z^2(z) = -\epsilon_{\perp}(z) k_{\perp}^2 / \epsilon_{\parallel}(z). \quad (3.11)$$

С уменьшением плотности $\epsilon_{\parallel}(z)$ убывает, а $K_z(z)$ возрастает. Это означает, что уравнение (3.4) в принятом приближении не имеет локализованных решений. Плазма в этом случае все же может оказаться неустойчивой, однако саму задачу об устойчивости теперь надо решать иначе, исследуя поведение волнового пакета (см. § 4.4 т. 1 и § 1.5, 2.4 данного тома).

Полагаем, что волновой пакет возник где-то внутри плазмы, имеет вещественную частоту и распространяется к краю ловушки. Уравнение (3.11) дает закон изменения волнового числа K_z в пространстве. Амплитуда пакета изменяется при этом по закону

$$|\psi| \sim \exp[-\int \text{Im} K_z(z) dz]. \quad (3.12)$$

Из (3.11) можно найти, что при ϵ_{\perp} вида (3.2) имеет место усиление волны $\text{Im} K_z(z) < 0$ (см. § 4.5 т. 1), так что амплитуда нарастает в пространстве. О неустойчивости можно говорить в случае, если никакие другие факторы не мешают амплитуде пакета достигнуть больших значений.

При распространении пакета в область $z \approx L/2$, где плотность плазмы мала, функция $K_z(z)$ существенно возрастает и может достигать значений порядка

$$K_z^{\text{макс}} \approx \omega / v_{Te}. \quad (3.13)$$

При этом уравнение (3.4) потеряет силу, а из более точного уравнения, учитывающего тепловое движение электронов [уравнение типа (12.24) т. 1], можно найти, что теперь пространственное нарастание амплитуды сменится затуханием. Это и есть основной фактор, препятствующий нарастанию пакета до больших амплитуд.

Оценивая показатель экспоненты (3.12) как $L |\text{Im} K_z|$, запишем качественно условие неустойчивости:

$$L |\text{Im} K_z| \approx N, \quad (3.14)$$

где N — некоторое число, превышающее единицу (например, $N=10$). С помощью (3.11) находим, что $|\text{Im} K_z| \approx (m_e/m_i)^{1/2} k_{\perp}^{(0)}$. Тогда из (3.14) вытекает оценка типа (3.10), но с коэффициентом N в правой части.

Таким образом, при плавном спаде плотности длина неустойчивой плазмы оказывается большей, чем при резком.

Численные расчеты критической длины проведены в работе Поста и Розенблюта. Аамодт и Бук показали, что при расчете критической длины следует учитывать отражение волн от неоднородностей (второе приближение по параметру квазиклассичности, см. монографию В. Л. Гинзбурга).

Библиографический обзор к гл. 3

1. Михайловский А. Б. Дрейфово-циклотронная неустойчивость плазмы с горячими ионами. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 125.
Исследуется влияние продольной неоднородности плазмы и магнитного поля на циклотронные неустойчивости.
2. Rosenbluth M. N., Post R. F. High-frequency electrostatic plasma instability inherent to «loss-cone» particle distributions. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 547.
3. Post R. F., Rosenbluth M. N. Electrostatic instabilities in finite mirror-confined plasmas. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 730.
В работах [2, 3] рассматривается возбуждение волновых пакетов в плазме конечной длины (§ 3.2).
4. Aamodt R. F., Book D. L. Critical length determination for convective instabilities in weakly inhomogeneous plasmas. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 143.
Обсуждается поведение волновых пакетов в неустойчивой плазме с δ -функциональным распределением ионов и холодными электронами. Рассматривается вопрос о критической длине ловушки, для которой развитие высокочастотной неустойчивости не опасно (§ 3.2).
5. Beasley C. O. Convective and absolute Harris instabilities. — «Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 466.
6. Guest G. E., Dory R. A. Effect of electron temperature on absolute instabilities in loss-cone plasmas. — «Phys. Fluids», 1968, v. 11, p. 1775.
7. Resonant loss-cone instabilities in mirror confined plasmas. — In: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, V. 2. IAEA, Vienna, 1969, p. 141. Auth.: C. O. Beasley et al.
В работах [5—7] показано, что ионно-циклотронные колебания при достаточно большой плотности плазмы абсолютно неустой-

- чивы и потому могут развиваться при меньшей длине ловушки, чем высокочастотные колебания.
8. **Nonlocal reflexion in inhomogeneous media.** — «Phys. Fluids», 1968, v. 11, p. 365. Auth.: H. L. Berk e. a.
 9. **Criteria for stabilization of electrostatic modes in mirror-confined plasmas.** — In: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, V. 2. IAEA, Vienna, 1969, p. 151. Auth.: H. L. Berk e. a.
В работах [8, 9] обсуждаются конвективные высокочастотные неустойчивости с учетом эффекта нелокального отражения и циклотронные абсолютные неустойчивости с учетом продольной неоднородности плазмы.
 10. **Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А.** К теории устойчивости ионного пучка, инжектируемого в плазму поперек магнитного поля. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1960. Исследуется влияние продольной неоднородности магнитного поля на раскачку ионно-циклотронных колебаний плазмы с δ -функциональным распределением по скоростям.
 11. **Арсенин В. В.** Об устойчивости плазмы в коротких ловушках. — «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 614.
 12. **Cotsaftis M.** Dispersion relation for microinstabilities in finite plasma. — «Phys. Lett.», 1967, v. 25A, p. 170.
 13. **Cotsaftis M.** Stabilité électrostatique des plasmas de longueur finie. — «Nucl. Fusion», 1967, v. 7, p. 3.
В работах [11—13] исследуется влияние торцевых эффектов (отражения частиц от концов ловушки) на раскачку ионно-циклотронных и высокочастотных колебаний.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ (ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ)
ГРАДИЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ
В ПРЯМОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Глава 4

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕХАНИЗМЫ РАСКАЧКИ
КОЛЕБАНИЙ И ИХ РОЛЬ
В ПРОЦЕССАХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПУЧКОВ С ПЛАЗМОЙ§ 4.1. Конвекция зарядов поперек магнитного
поля из-за дрейфа в скрещенных полях

Изучим новые типы неустойчивостей, дисперсионные уравнения которых содержат пространственные градиенты стационарных параметров плазмы и потому не сводятся к обсуждавшимся в т. 1. Настоящая глава является введением в теорию этих неустойчивостей, в дальнейшем называемых градиентными. Здесь обсуждается физический смысл градиентных эффектов, дан вывод уравнений, описывающих градиентные неустойчивости, и проведен анализ тех неустойчивостей, которые могут развиваться в пучково-плазменных системах. Рассматриваются только чисто электронные неустойчивости, движение ионов учитывается в последующих главах. Такие неустойчивости возможны при достаточно больших поперечных градиентах функции распределения пучка.

1. **Дрейф частиц в скрещенных полях E и B_0 .** Электрическое поле E , действующее на частицы, находящиеся в статическом поле B_0 , приводит к их смещению не только вдоль E , но и в направлении $[E, B_0]$. Это вытекает из уравнений движения

$$dV/dt = (e/m)E + [V, \omega_B], \quad \omega_B = eB_0/mc. \quad (4.1)$$

Действительно, приняв $B_0 \parallel z$, выбрав координатно-временную зависимость $E(r, t)$ в виде $E(x, y) \exp\{-i\omega t + ik_z z\}$

и предположив, что невозмущенная скорость частицы $\mathbf{V}_0 \parallel \mathbf{B}_0$, с помощью (4.1) найдем в линейном приближении по \mathbf{E} скорость частицы:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'_{\perp} + V'_z \mathbf{e}_z, \quad (4.2)$$

где \mathbf{V}' удовлетворяет уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} -i(\omega - k_z V_0) \mathbf{V}'_{\perp} - \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{V}'_{\perp}, \boldsymbol{\omega}_B]; \\ -i(\omega - k_z V_0) V'_z - \frac{e}{m} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}'_{\perp} &= \frac{ie}{mD} \{ \boldsymbol{\omega}' \mathbf{E}_{\perp} + i[\mathbf{E}_{\perp}, \boldsymbol{\omega}_B] \}; \\ V'_z &= \frac{ie}{m} \frac{E_z}{\omega - k_z V_0}; \quad D = (\omega - k_z V_0)^2 - \omega_B^2; \\ \boldsymbol{\omega}' &= \omega - k_z V_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Составляющая \mathbf{V}' в направлении, поперечном \mathbf{E} и \mathbf{B}_0 , называемая дрейфом в скрещенных полях, особенно велика в случае низкочастотного поля \mathbf{E} , когда $|\omega - k_z V_0| \ll \omega_B$. При этом

$$\delta \mathbf{V}' = \frac{e}{m\omega_B} [\mathbf{E}, \mathbf{e}_z] = c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}_0]}{B_0^2}. \quad (4.5)$$

В этом приближении скорость дрейфа в скрещенных полях не зависит ни от массы, ни от заряда частиц.

2. Конвективный вклад в плотность зарядов из-за дрейфа в скрещенных полях. Пусть вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 со скоростью V_0 движется не одна частица, а некоторый пучок с плотностью n_0 , зависящей от поперечных координат, $n_0 = n_0(x, y)$. Под воздействием поля возмущений \mathbf{E} плотность пучка изменится на n' , которую можно вычислить, воспользовавшись уравнением непрерывности

$$-i(\omega - k_z V_0) n' + ik_z V'_z n_0 + \text{div}(n_0 \mathbf{V}'_{\perp}) = 0 \quad (4.6)$$

и выражениями (4.4) для компонент возмущенной скорости \mathbf{V}' . В случае низкочастотного $|\omega - k_z V_0| \ll \omega_B$ электрического

поля $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ возмущенная плотность

$$n' = \frac{e}{m} \left\{ \frac{n_0 k_z^2 \psi}{(\omega - k_z V_0)^2} + \frac{1}{\omega_B^2} \nabla_{\perp} (n_0 \nabla_{\perp} \psi) - i \frac{[\nabla\psi, \nabla n_0]_z}{(\omega - k_z V_0) \omega_B} \right\}. \quad (4.7)$$

Первый член в фигурных скобках обусловлен возмущенным движением частиц вдоль магнитного поля со скоростью V'_z (продольной инерцией частиц), второй — движением частиц в направлении \mathbf{E}_{\perp} (поперечной инерцией). Оба эти члена присутствуют в выражении для n' и при $\nabla n_0 = 0$, т. е. не являются специфическими для неоднородной плазмы. Третий член в фигурной скобке, обусловленный дрейфом частиц в скрещенных полях, существенно зависит от неоднородности плазмы: он отличен от нуля лишь при

$$\nabla n_0 \neq 0. \quad (4.8)$$

Из (4.7) следует также, что вклад в возмущенную плотность из-за дрейфа в скрещенных полях возникает не при любых типах возмущений, а лишь в случае, когда возмущенное электрическое поле имеет компоненту, поперечную градиенту плотности и статическому магнитному полю:

$$[\nabla\psi, \nabla n_0]_z \neq 0. \quad (4.9)$$

Примеры возмущений, удовлетворяющих условиям (4.9) для случаев плоской и цилиндрической симметрии, таковы: при $\nabla n_0 \parallel x$ поле таких возмущений обязательно должно зависеть от y , $\partial\psi/\partial y \neq 0$ ($k_y \neq 0$ при $\psi \sim \exp(ik_y y)$), а при $\nabla n_0 \parallel r_{\perp}$ — от азимутальной координаты $\partial\psi/\partial\varphi \neq 0$ ($l \neq 0$ при $\psi \sim \exp(il\varphi)$).

Изменение плотности под действием дрейфа в скрещенных полях происходит в результате ухода из интересующей нас точки плазмы с одной плотностью и прихода в эту точку плазмы с другой плотностью. Такой процесс можно назвать конвекцией.

3. Связь плотности с токами в мелкомасштабных возмущениях при наличии эффектов конвекции. Пусть поперечная длина волны возмущений достаточно мала по сравнению с размером неоднородности плазмы a ,

так что невозмущенный потенциал может быть представлен в виде

$$\psi = \psi^{(0)}(\mathbf{r}_\perp) \exp\left(i \int \mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp) d\mathbf{r}_\perp\right), \quad (4.10)$$

где $k_\perp a \gg 1$, а $\psi^{(0)}$ и k_\perp — функции, мало меняющиеся на расстоянии $1/k_\perp$. В этом приближении возмущенная плотность (4.7)

$$n' = \frac{e\psi}{m} \left\{ \frac{n_0 k_z^2}{(\omega - k_z V_0)^2} - \frac{n_0 k_\perp^2}{\omega_B^2} - i \frac{[\mathbf{k}_\perp \cdot \nabla n_0]_z}{\omega_B (\omega - k_z V_0)} \right\}. \quad (4.11)$$

В пренебрежении конвекцией, когда неважен последний член в фигурных скобках, это выражение связано с возмущенными токами простым соотношением, вытекающим из уравнения непрерывности:

$$en' = \rho' - \mathbf{kj}'/\omega, \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } j'_\perp &= -\frac{e^2 n_0 \psi}{m \omega_B^2} \left\{ \mathbf{k}_\perp (\omega - k_z V_0) + i [\mathbf{k}_\perp, \omega_B] \right\}; \\ j'_z &= \frac{e^2 n_0 \psi}{m} \left\{ \frac{k_z \omega}{(\omega - k_z V_0)^2} - \frac{k_\perp^2 V_0}{\omega_B^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Токи и плотность в этом случае зависят от локальных значений невозмущенной плотности, но не от ее производных по координатам.

При учете конвекции меняется как сам закон связи между плотностью и токами (4.12), так и выражения для токов. Вместо (4.12) для амплитуд n' и j' [коэффициентов при экспоненте типа (4.10)] теперь имеем (штрих опущен)

$$\rho(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \{ \mathbf{kj}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - i \nabla_\perp j_\perp(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \}, \quad (4.14)$$

так что в выражение для плотности добавляется член с производной от амплитуды поперечного тока. Вклад этой производной, хотя он и может показаться малым как $1/ka$ по сравнению с $k_\perp j_\perp$, в действительности больше, поскольку главный член в j'_\perp пропорциональный $[\mathbf{k}, \omega_B]$, при умножении на k_\perp даст нуль. С другой

стороны, подразумевается, что в (4.14) опущены малые члены порядка $1/ka$, возникающие от дифференцирования части j'_\perp , параллельной k_\perp . При учете конвекции изменится также выражение для продольного тока j'_z : в правую часть второго равенства (4.13) при этом добавляется член

$$j'_{z\text{конв}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = -iV_0 \nabla_\perp j_\perp(\mathbf{k}, \mathbf{r}) / (\omega - k_z V_0). \quad (4.15)$$

Этот член описывает эффект конвекции j'_\perp .

С учетом (4.14), (4.15) находим, что конвективный вклад в плотность определяется конвективным вкладом в продольный ток и производной от поперечного тока:

$$\rho_{\text{конв}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \{ k_z j'_{z\text{конв}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - i \nabla_\perp j'_\perp(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \}. \quad (4.16)$$

4. Связь между скаляром и тензором диэлектрической проницаемости. В случае колебаний однородной плазмы из уравнений Пуассона и уравнений, описывающих плазму, получится дисперсионное уравнение вида

$$\epsilon_0 = 1 + \sum_\alpha \epsilon_0^{(\alpha)} = 0, \quad (4.17)$$

где $\epsilon_0^{(\alpha)}$ — вклад α -компоненты плазмы в скаляр диэлектрической проницаемости. Величина $\epsilon_0^{(\alpha)}$ связана с соответствующими вкладками в компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ik}^{(\alpha)}$ соотношением

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{k^2} k_i \epsilon_{ik}^{(\alpha)} k_k. \quad (4.18)$$

Этот результат можно рассматривать как следствие уравнения непрерывности (4.12). Действительно, записав уравнение Пуассона в виде

$$1 - \frac{4\pi}{k^2} \sum_\alpha \chi^{(\alpha)} = 0, \quad (4.19)$$

где χ — коэффициент пропорциональности между плотностью заряда ρ и потенциалом ψ , $\rho = \chi\psi$, найдем, что

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = -(4\pi/k^2) \chi^{(\alpha)}. \quad (4.20)$$

Но, согласно (4.12) и определению $j'_i = (\omega/4\pi i) \epsilon_{ik}^{(\alpha)} E_k$, при $\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\psi$ имеем

$$\chi^{(\alpha)} = -(1/4\pi) k_i \epsilon_{ik}^{(\alpha)} k_k. \quad (4.21)$$

Из (4.20) и (4.21) как раз и вытекает связь (4.18). На это уже обращалось внимание в приложении к гл. 1 т. 1. Эта простая связь между скаляром и тензором диэлектрической проницаемости перестает иметь место в случае неоднородной плазмы, когда играют роль эффекты конвекции. Учитывая, что в этом случае плотность удовлетворяет уравнению (4.14), находим [вместо (4.18)] связь скаляра ϵ_0 , определенного соотношением (4.20), с тензором ϵ_{ij} :

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{k^2} \left(k_i \epsilon_{ij} - i \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_i} \right) k_j. \quad (4.22)$$

Согласно предыдущему пункту, конвективный вклад в $\epsilon_0^{(\alpha)}$ равен

$$\epsilon_0^{(\alpha)}_{\text{конв}} = \frac{1}{k^2} \left(k_z \epsilon_{zj \text{конв}} - i \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_i} \right) k_j. \quad (4.23)$$

Полное выражение для $\epsilon_0^{(\alpha)}$ с учетом (4.11) имеет вид

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z V_0)^2} \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^2 \left(\frac{k_{\perp}^2}{k} \right) - \frac{[k_{\perp}, \nabla \omega_p^2]_z}{k^2 \omega_B (\omega - k_z V_0)}; \quad \omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 / m. \quad (4.24)$$

Конвекция не является единственным эффектом, специфичным для неоднородной плазмы в магнитном поле. О других своеобразных особенностях неоднородной плазмы в магнитном поле см. в § 4.6.

§ 4.2. Конвективная раскачка колебаний холодной плазмы «холодным» пучком с неоднородной плотностью

Рассмотрим простейший пример неустойчивости неоднородной плазмы из-за эффекта конвекции. Рассмотрим систему плазма—пучок, находящуюся в магнитном поле. Предположим, что тепловые скорости частиц пучка и плазмы достаточно малы по сравнению со средней скоростью пучка. Вообще говоря, в такой системе может развиваться пучковая неустойчивость. Если, однако, плотности пучка и плазмы достаточно малы, так что $\omega_p \ll \omega_B$, и, кроме того, поперечный раз-

мер плазмы достаточно мал, то пучковая неустойчивость должна отсутствовать. Эта ситуация обсуждалась в § 2.3, а сам результат может быть пояснен так. Пучковая неустойчивость связана с раскачкой довольно длинноволновых возмущений:

$$k_z \leq \omega / V_0. \quad (4.25)$$

В (4.25) в качестве ω следует подставить частоту собственных колебаний плазмы, которая при $\omega_p \ll \omega_B$ равна

$$\omega \approx \omega_p k_z / k. \quad (4.26)$$

Здесь $k = \sqrt{k_z^2 + k_{\perp}^2}$ — полное волновое число. Оно во всяком случае не меньше, чем k_{\perp} , тогда как k_{\perp} ограничено снизу обратным поперечным размером плазмы a , т. е.

$$k \geq k_{\perp \text{ мин}} \approx 1/a. \quad (4.27)$$

Из (4.25) — (4.27) находим, что пучковая неустойчивость невозможна, если плотность плазмы и поперечный размер достаточно малы:

$$\omega_p < V_0 / a. \quad (4.28)$$

Ниже это условие будем предполагать выполненным. Покажем, что при этом пучок и плазма все же могут оказаться неустойчивыми. Причиной такой неустойчивости служит конвективный перенос частиц пучка поперек магнитного поля.

Уравнение колебаний системы плазма — пучок можно получить, подставив значение возмущенных плотностей пучка и плазмы из (4.7) в уравнение Пуассона:

$$-\Delta \psi = 4\pi \sum_{\alpha=1,2} e n'_{\alpha}(\psi). \quad (4.29)$$

Здесь сумма по группам частиц: 1 — плазма, 2 — пучок. Учитывая явный вид (4.7), находим, что в приближении сильного магнитного поля $\omega_B \gg \omega_p$ вклад в (4.29) от поперечного инерционного движения частиц мал как $(\omega_p / \omega_B)^2$. Этими членами пренебрежем. Пренебрежем также вкладом в плотность пучка от продольного инерционного движения его частиц. Именно из-за этого члена и могла бы возникнуть пучковая неустойчивость, однако в силу неравенства (4.28) этот эффект отсутствует. Итак, вклад пучка в (4.29) при сделанных пред-

положениях оказывается равным

$$n'_2 = -\frac{ie}{m} \frac{[\nabla\psi, \nabla n_2]_z}{(\omega - k_z V_0) \omega_B}. \quad (4.30)$$

Примем, что наша система в поперечном направлении ограничена проводящими стенками и плотность плазмы в области между стенками постоянна, $\nabla n_1 = 0$. Конвективный вклад в возмущенную плотность плазмы будет при этом отсутствовать, а поскольку мы пренебрегаем и поперечной инерцией, то из (4.7) в принятом приближении следует

$$n'_1 = \frac{e}{m} \frac{n_1 k_z^2}{\omega^2} \psi. \quad (4.31)$$

Объединяя (4.29)–(4.31), получаем искомое уравнение для ψ :

$$\Delta\psi + \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega} k_z\right)^2 \psi - i \frac{4\pi e^2}{m} \frac{[\nabla\psi, \nabla n_2]}{\omega_B (\omega - k_z V_0)} = 0. \quad (4.32)$$

Чтобы проще всего продемонстрировать возможность конвективной раскачки колебаний, рассмотрим случай $\nabla n_2 \parallel \mathbf{x}$ и примем профиль плотности пучка линейным: $n_2 = \bar{n}_2(1 + \kappa x)$. При этом собственными функциями являются плоские волны с $k_x = \pi n x$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Из (4.32) тогда получаем дисперсионное уравнение

$$1 - \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega}\right)^2 \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 + \frac{\kappa k_y \omega_{p2}^2}{k^2 \omega_B (\omega - k_z V)} = 0, \quad (4.33)$$

здесь $V \equiv V_0$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. В частном случае $\omega \ll \ll k_z V$ из (4.33) получается выражение для частоты

$$\omega = \pm \frac{\omega_{p1} k_z/k}{\sqrt{1 - \kappa k_y \omega_{p2}^2 / k^2 k_z \omega_B V}}. \quad (4.34)$$

Видно, что имеет место раскачка возмущений, если

$$\kappa k_y \omega_{p2}^2 / (k^2 k_z V \omega_B) > 1. \quad (4.35)$$

Максимальный инкремент возмущений порядка

$$\gamma \approx \frac{\omega_{p1}}{\omega_B} \frac{\kappa \omega_{p2}^2}{k^2 V}. \quad (4.36)$$

При больших магнитных полях граница неустойчивости пучка в плазме должна удовлетворять соотношению типа (4.28), а при малых — соотношению типа (4.35). Если ввести такие величины, как плотность тока пучка $j \sim n_2 V$ и энергия его частиц $W \sim V^2/2$, то, используя (4.28) и (4.35), можно заключить, что зависимость критического тока от энергии частиц должна иметь такой вид, как на рис. 4.1: при малых W (пучковая раскачка)

$$j_{\text{гран}} \sim W^{3/2}, \quad (4.37)$$

при больших W (конвективная раскачка)

$$j_{\text{гран}} \sim W. \quad (4.38)$$

Неустойчивости соответствует область больших токов $j > j_{\text{гран}}$. Зависимость (4.37) сменяется на (4.38) при $W = W^*$, причем

$$W^* \sim B_0^2. \quad (4.39)$$

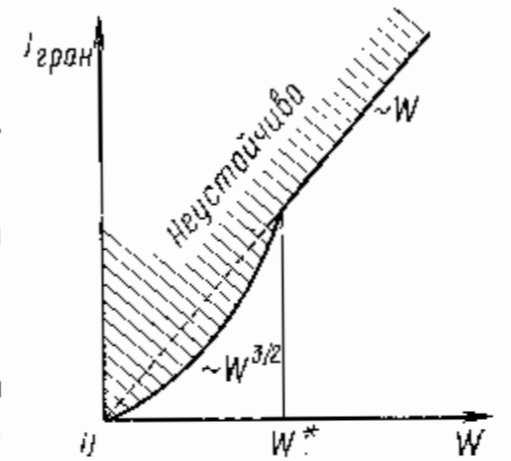


Рис. 4.1. Зависимость граничного тока от энергии частиц W . Неустойчивости соответствует заштрихованная область, в которой $j > j_{\text{гр}}$

§ 4.3. Неустойчивость потока с неоднородным профилем скорости

В § 4.2 обсуждалась возможность конвективной раскачки колебаний в условиях, когда в одной и той же точке пространства имеются две группы частиц — быстрые (пучок) и медленные (плазма). Наиболее существенным моментом, определяющим возможность развития такой неустойчивости, является наличие частиц с разными скоростями, а не локальная двухкомпонентность плазмы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим неустойчивость однокомпонентной системы: плазмы, состоящей из потока частиц (одного сорта) со скоростью $\mathbf{V}_0 \parallel \mathbf{B}_0$, которая зависит от поперечной координаты:

$$\nabla_{\perp} V_0 \neq 0. \quad (4.40)$$

Это условие означает, что в системе имеются частицы с разными скоростями.

Поток с неоднородным профилем скорости может быть неустойчив и в пренебрежении эффектом конвекции (см. § 1.6, 2.4). Такого типа неустойчивость аналогична пучковой (неустойчивость пространственно-разделенных пучков). Если, однако, магнитное поле достаточно велико $\omega_B > \omega_p$, то, согласно § 2.4, эта неустойчивость исчезает. Ниже магнитное поле предполагается большим ($\omega_B > \omega_p$), так что единственной причиной раскачки возмущений может быть только конвекция.

Уравнение для колебаний потока с неоднородным профилем скорости можно получить так же, как и в § 4.1, т. е. используя уравнения Пуассона, непрерывности и движения. В уравнениях движения типа (4.1) следует учесть теперь, что V_0 зависит от поперечной координаты. При этом первое уравнение системы (4.3) останется неизменным, а второе примет вид

$$-i(\omega - k_z V_0) V'_z + (\mathbf{V}'_{\perp} \nabla) V_0 = \frac{e}{m} E_z. \quad (4.41)$$

В результате получится уравнение для потенциала ψ , которое при $\nabla V_0 \neq 0$ и $\nabla n_0 = 0$ выглядит так:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \psi \left[k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega_p^2 k_z^2}{(\omega - k_z V_0)^2} + \frac{k_y k_z \omega_p^2}{\omega_B (\omega - k_z V_0)^2} \frac{dV_0}{dx} \right] = 0. \quad (4.42)$$

Исследуем это уравнение в двух предельных случаях: скачкообразного и плавного (по сравнению с длиной волны вдоль x) профилей скорости.

1. Приближение скачкообразного профиля скорости. Полагая в уравнении (4.42) $\omega/k_z > (V_0, \omega_p/k_y)$ и решая его методом поверхностных волн, изложенным в § 1.6, получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{k_y}{|k_y|} \frac{\omega_p^2}{\omega_B} k_z (V_1 - V_2). \quad (4.43)$$

При соответствующем выборе знака k_z/k_y правая часть (4.43) отрицательна. Такие возмущения раскачиваются с инкрементом

$$\gamma = \left[\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_B} \left| \frac{k_z (V_2 - V_1)}{\omega_B} \right| \right]^{1/2}. \quad (4.44)$$

2. Мелкомасштабные возмущения в потоке с плавным профилем скорости. Если длина волны возмущений λ_x мала по сравнению с характерным размером изменения скорости, то решение уравнения (4.42) можно найти, используя квазиклассическое приближение, § 1.5. Локальное дисперсионное уравнение, вытекающее из (4.42), имеет вид

$$k_{\perp}^2 + k_z^2 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z V)^2} \left(k_z^2 - \frac{k_y k_z}{\omega_B} \frac{dV}{dx} \right) = 0; \quad \left. \begin{array}{l} \\ V \equiv V_0. \end{array} \right\} \quad (4.45)$$

Возмущения раскачиваются, если

$$\frac{k_z}{k_y} < \frac{1}{\omega_B} \frac{dV}{dx}. \quad (4.46)$$

Максимальный инкремент возмущений порядка

$$\gamma \approx \frac{\omega_p}{\omega_B} \frac{dV}{dx}. \quad (4.47)$$

3. Стабилизирующая роль градиента плотности. Наличие градиента плотности приводит к стабилизации потока. Чтобы убедиться в этом, учтем в (4.45) член с ∇n_0 [он такого же типа, как и в уравнении (4.24)]:

$$k^2 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z V)^2} \left(k_z^2 - \frac{k_y k_z}{\omega_B} \frac{dV}{dx} \right) + \frac{\kappa_n k_y \omega_p^2}{\omega_B (\omega - k_z V)} = 0. \quad (4.48)$$

Из (4.48) следует критерий стабилизации

$$\frac{d \ln n_0}{d \ln V} > \frac{k_y V}{\omega_p}. \quad (4.49)$$

На пределах применимости принятых здесь приближений, а именно при $\omega_p \approx \omega_B$, $V \approx v_{Te}$, $k_y \approx 1/\rho_e$, условие (4.49) качественно означает $d \ln n_0 / d \ln V > 1$.

§ 4.4. Роль эффекта конвекции в процессах резонансного взаимодействия частиц с колебаниями

1. Диэлектрическая проницаемость с учетом эффекта конвекции для пучка с продольным разбросом частиц по скоростям. Плазму с продольным разбросом

частиц по скоростям можно рассматривать как совокупность бесконечного числа холодных потоков, каждый из которых обладает своей плотностью $n_0^{(\alpha)}$ и скоростью $V_0^{(\alpha)}$. Исходя из этого, возмущенную плотность такой плазмы можно представить как сумму выражений типа (4.7) по всем потокам:

$$n'(\psi) = \sum_{\alpha} n' (V_0^{(\alpha)}, n_0^{(\alpha)}, \psi). \quad (4.50)$$

Полагая, что каждому V_0 соответствует свое $n_0(V_0)$, и заменяя в (4.50) суммирование по α суммированием по скорости V_0 , получаем

$$n'(\psi) = \sum_{V_0} n' (n_0(V_0), V_0, \psi). \quad (4.51)$$

Далее переходим от суммирования по V_0 к интегрированию по интервалам скорости dv_z . Число частиц на интервале dv_z обозначим $f_0(v_z)dv_z$. В результате (4.51) преобразуется к виду (аналогичная процедура использовалась в задаче к § 2.1 т. 1):

$$n'(\psi) = \int dv_z n' (f_0(v_z), \psi). \quad (4.52)$$

Теперь остается подставить сюда явный вид функции $n' (f_0(v_z))$ из (4.7). Функция $n' (f_0)$ означает, что в (4.7) n_0 заменено f_0 , а V_0 — величиной v_z . Пренебрегая поперечной инерцией, получаем

$$n' = \frac{e}{m} \int dv_z \left\{ \frac{k_z^2 f_0}{(\omega - k_z v_z)^2} \psi - i \frac{[\nabla \psi, \nabla f_0]_z}{\omega_B (\omega - k_z v_z)} \right\}. \quad (4.53)$$

В приближении мелкомасштабных возмущений этому n' , согласно (4.20), соответствует диэлектрическая проницаемость

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(\alpha)} &= - \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \left\{ \frac{k_z^2 f_0}{(\omega - k_z v_z)^2} - \frac{k_y \partial f_0 / \partial x}{\omega_B (\omega - k_z v_z)} \right\} dv_z = \\ &= \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{dv_z}{\omega - k_z v_z} \left(k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_B} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

2. Конвективная раскачка колебаний плазмы «горячим» пучком. Перейдем к непосредственному анализу взаимодействия с плазмой неоднородного пучка малой плотности и большим разбросом частиц по продольным

скоростям. Как и в п. 2 § 4.3 и § 4.2, рассмотрим мелкомасштабные возмущения $k_{\perp} a \gg 1$, локализованные в области, малой по сравнению с размером пучка. Плотность пучка считаем малой, поэтому, как мы увидим далее, инкремент нарастания возмущений оказывается малым по сравнению с частотой, $\gamma \ll \text{Re} \omega$. Локальным приближением в этих условиях можно пользоваться, если γ все же не слишком мало, $\gamma \gg V_{\text{гр}}/a$, где $v_{\text{гр}} = d\omega/dk_x$ (см. § 1.4). В противном случае надо решать задачу о раскачке собственных колебаний плазмы.

Локальное дисперсионное уравнение, описывающее колебания системы однородная плазма — неоднородный пучок, имеет вид

$$\epsilon_0^{(0)} + \epsilon_0^{(1)} = 0, \quad (4.55)$$

где

$$\epsilon_0^{(0)} = 1 - (\omega_{p0}^2 / \omega^2) \cos^2 \theta, \quad (4.56)$$

а $\epsilon_0^{(1)}$ определяется формулой (4.54). Индекс 0 относится к плазме, а индекс 1 — к пучку; $\theta \equiv \text{arctg}(k_{\perp}/k_z)$ — угол между волновым вектором и магнитным полем.

Полагая $\epsilon_0^{(1)}$ малым, находим частоту и инкремент возмущений:

$$\text{Re} \omega = \pm \omega_p \cos \theta; \quad (4.57)$$

$$\gamma = - \frac{\text{Im} \epsilon_0^{(1)}}{\partial \epsilon_0^{(0)} / \partial \text{Re} \omega}. \quad (4.58)$$

С учетом (4.54)

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{|k_z|} \frac{4\pi e^2}{mk^2} \left(k_z \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_B} \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial x} \right)_{v_z = \omega/k_z}. \quad (4.59)$$

В пренебрежении конвекцией (членом с $\partial f_0 / \partial x$) инкремент положителен (неустойчивость), если только в области резонансных скоростей функция распределения пучка обладает положительной производной $\partial f_0^{(1)} / \partial v_z > 0$ (предполагается $\omega/k_z > 0$). При учете конвекции раскачка может иметь место даже при $\partial f_0^{(1)} / \partial v_z \leq 0$. Например, при $\partial f_0^{(1)} / \partial v_z = 0$ (рис. 4.2, а)

из (4.59) следует

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2 \omega k_y}{m k^2 |k_z| \omega_B} \left(\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial x} \right)_{v_z = \omega/k_z}, \quad (4.60)$$

так что при соответствующем знаке k_z/k_y $\gamma > 0$.

Из 4.60 видно, что раскачка колебаний конвективным способом обусловлена не тем, что имеется средняя направленная скорость пучка, а просто наличием частиц с резонансным значением скорости. В частности, резуль-

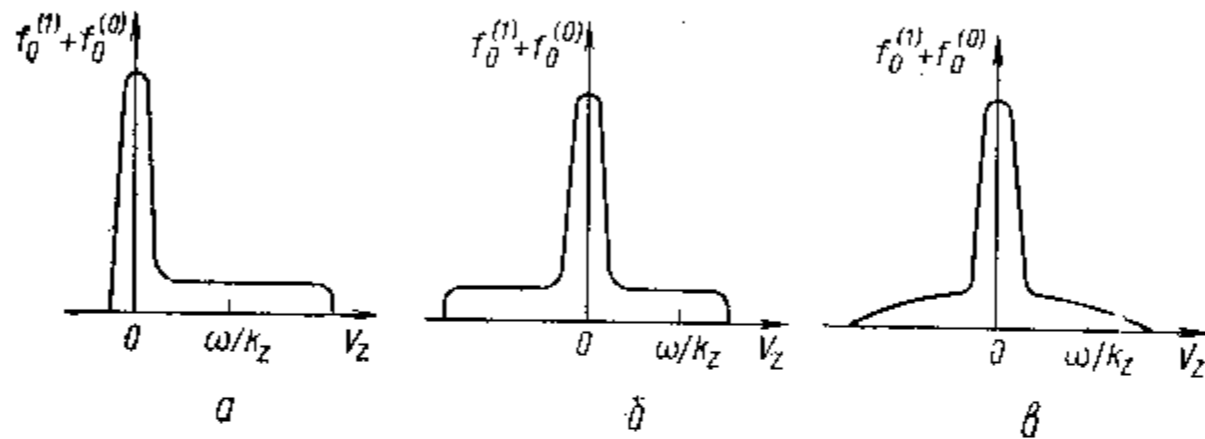


Рис. 4.2. Функция распределения по продольным скоростям системы плазма — «горячий» пучок $f_0^{(0)} + f_0^{(1)}$. В области резонансных скоростей $v_z = \omega/k_z$ в случаях а и б $\partial f_0^{(1)}/\partial v_z = 0$, в случае в $\partial f_0^{(1)}/\partial v_z < 0$

тат (4.60) остается неизменным, если распределение по v_z имеет такой характер, как на рис. 4.2, б. В этом случае уже следует говорить не о направленном пучке, а о группе достаточно нагретых частиц.

При $\partial f_0^{(1)}/\partial v_z < 0$ неустойчивость имеет место, если конвекция пересиливает обычное затухание Ландау, т. е.

при

$$\left| \frac{k_y}{\omega_B} \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial x} \right| > \left| k_z \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial v_z} \right|. \quad (4.61)$$

В частности, при максвелловском распределении быстрых частиц $f_0^{(1)} \sim n_1(x) \exp(-mv_z^2/2T_{\parallel})$ (см. рис. 4.2, в) условие (4.61) означает

$$\frac{k_y \kappa}{\omega_B} > \frac{m\omega}{T_{\parallel}}; \quad \kappa = \partial \ln n_1 / \partial x, \quad (4.62)$$

а из (4.59) в этом случае получается

$$\gamma = - \left(1 - \frac{k_y \kappa T_{\parallel}}{m\omega_B \omega} \right) \frac{V\pi}{|k_z| v_{T_{\parallel}}} \left(\frac{\omega}{k d_1} \right)^2; \quad (4.63)$$

$$d_1^2 = T_{\parallel} / 4\pi n_1 e^2.$$

Видно, что раскачиваются колебания, частота которых достаточно мала:

$$\omega < |\kappa T_{\parallel} k_y / m\omega_B|. \quad (4.64)$$

В рассматриваемом примере частота определяется выражением (4.57), так что критерий (4.62) дает

$$\cos \theta < \kappa k_y T_{\parallel} / m\omega_B \omega_p. \quad (4.65)$$

Но $\cos \theta$ не может быть слишком мал, $\cos \theta > (m_e/m_i)^{1/2}$, так как иначе необходимо было бы учитывать ионы. Поэтому не может быть слишком малым и κ , т. е. рассматриваемая (электронная) неустойчивость возможна только в случае достаточно большого градиента плотности.

В заключение заметим, что при $T_{\parallel} = T_{\perp}$ критерий неустойчивости (4.64) может быть представлен в виде

$$\omega/k_y V_{\perp} < 1, \quad (4.66)$$

где величина $V_{\perp} \equiv \kappa T / m\omega_B$ имеет смысл макроскопической скорости данной компоненты плазмы поперек магнитного поля, иначе называемой средней скоростью ларморовских токов (более подробно о V_{\perp} см. в § 4.6). При такой форме записи условие неустойчивости можно сформулировать так: раскачиваются возмущения, поперечная фазовая скорость которых ω/k_y направлена в сторону V_{\perp} и не превосходит V_{\perp} . При использовании этого правила надо помнить, что в действительности механизм раскачки не связан с наличием V_{\perp} и проявляется даже при $V_{\perp} = 0$ ($T_{\perp} = 0$), если $T_{\parallel} \neq 0$. Кроме того, критерий неустойчивости не сводится к условию типа (4.66), если распределение частиц по продольным скоростям не максвелловское.

§ 4.5. Конвекция тепла и неустойчивость из-за градиента температуры

Пусть имеется однокомпонентная плазма с $\nabla n_0 = 0$ и $\nabla T \neq 0$. Наличие градиента температуры может быть причиной неустойчивости плазмы. Убедимся в этом на примере плазмы в сильном магнитном поле $\omega_B \gg \omega_p$.

Рассмотрим возмущения с $k_z v_T \ll \omega \ll \omega_B$. Полагая в выражении (4.54) для $\epsilon_0^{(\alpha)}$ функцию $f_0(v_z)$ максвелловской, произведем разложение в ряд по $k_z v_z / \omega$ и подставим результат в локальное дисперсионное уравнение $1 + \epsilon_0^{(\alpha)} = 0$, $\alpha = 0$. Тогда

$$1 - ((\omega_p/\omega) \cos \theta)^2 (1 - \omega_T/\omega) = 0, \quad (4.67)$$

где $\omega_T \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \frac{k_y}{m\omega_B}$. При $\omega \ll \omega_T$ из (4.67) следует кубичное уравнение для ω :

$$\omega^3 = -\omega_p^2 \omega_T \cos^2 \theta, \quad (4.68)$$

из которого находим, что один из корней соответствует неустойчивости с инкрементом

$$\gamma = (\sqrt{3}/2) |\omega_p^2 \omega_T \cos^2 \theta|^{1/3}. \quad (4.69)$$

Этот результат удовлетворяет условию $\gamma < \omega_T$ при $\cos \theta < \omega_T/\omega_p$. На пределе применимости, т. е. при $\cos \theta \approx \omega_T/\omega_p$, по порядку величины имеем

$$\gamma \approx \omega_T. \quad (4.70)$$

Уравнение (4.67) можно получить также с помощью следующей системы гидродинамических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega n' + ik_z V_z' &= 0; \\ -i\omega V_z' &= -\frac{ie}{m} k_z \psi - ik_z \frac{T'}{m}; \\ -i\omega T' + (\mathbf{V}_E \nabla) T_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

Эта система есть не что иное, как линеаризованные уравнения моментов функции распределения для n , $V_{||}$ и $T_{||}$, в которых учтено, что $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_E \equiv c[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]/B_0$, $\nabla n_0 = 0$ и опущены члены порядка $k_z v_T/\omega$. Выразив из (4.71)

плотность n' через потенциал возмущения ψ и подставив ее в уравнение Пуассона, приходим к (4.67).

При таком подходе видно, что причиной рассматриваемой неустойчивости является конвекция тепла — перенос энергии продольного движения частиц поперек магнитного поля из-за их дрейфа в скрещенных полях.

§ 4.6. Роль ларморовских потоков (угловой асимметрии стационарной функции распределения)

До сих пор обсуждались неустойчивости, для развития которых не существенно, обладают ли частицы невозмущенными поперечными скоростями. Пренебрегать поперечным движением удавалось потому, что всюду выше рассматривались только возмущения с длиной волны, значительно превосходящей ларморовский радиус частиц $k_{\perp} v_{\perp}/\omega_B \ll 1$. Теперь перейдем к исследованию другого класса неустойчивостей, механизм которых связан именно с поперечными скоростями частиц. Как будет показано ниже, для развития таких неустойчивостей необходимо наличие частиц со скоростями v_{\perp} , удовлетворяющими условию $k_{\perp} v_{\perp}/\omega_B > 1$.

Ясно, что наличие у частиц поперечных скоростей само по себе не может служить причиной неустойчивости. Как и в обсуждавшихся выше примерах, когда энергия колебаний черпалась из энергии продольного движения частиц, истинной причиной разбираемых здесь неустойчивостей является неоднородность плазмы. В то же время наличие неоднородности плазмы не влечет за собой обязательного появления неустойчивостей. Нужно иметь еще способ преобразования энергии стационарного движения частиц в энергию возмущений. Одним из таких способов (механизмов неустойчивостей) является обсуждавшийся в § 4.1 эффект конвекции. Именно конвекции обязано развитие неустойчивостей, рассмотренных в § 4.2—4.5.

Приступая к изучению неустойчивостей, энергия которых черпается из поперечной энергии частиц, необходимо выявить прежде всего механизм этих неустойчивостей.

Рассмотрим группу частиц с достаточно большими поперечными скоростями, полагая, что их ларморовский радиус велик по сравнению с поперечной длиной волны:

$$k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B \gg 1. \quad (4.72)$$

Такие частицы проходят много длин волн, прежде чем их траектории начнут искривляться. Искривление траектории частицы можно вовсе не учитывать, если за время оборота по ларморовской орбите возмущенное поле совершает достаточно много осцилляций и в результате неустойчивости существенно изменяет свою амплитуду, т. е.

$$\operatorname{Re} \omega \gg \omega_H, \quad \gamma \gg \omega_B. \quad (4.73)$$

В этом приближении статическое магнитное поле не влияет на возмущенное движение частиц и сказывается только на характере стационарного распределения частиц по скоростям. Вклад нашей группы частиц в локальную диэлектрическую проницаемость имеет при этом вид, хорошо известный в теории колебаний плазмы без магнитного поля:

$$\epsilon_0 = \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{k \partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv, \quad (4.74)$$

или, что то же самое,

$$\epsilon_0 = \frac{4\pi e^2}{mk} \int \frac{\partial f_k / \partial v_k}{\omega - kv_k} dv_k, \quad (4.75)$$

где v_k — проекция скорости на направление волнового вектора; f_k — функция распределения частиц по скоростям в направлении k .

Может ли приводить к раскачке колебаний интересующая нас группа частиц — это зависит от вида функции f_k . Раскачка возможна лишь в случае, когда максимум f_k не лежит при $v_k = 0$, т. е. в случае распределения пучкового типа. Убедимся теперь, что вследствие пространственной неоднородности распределение частиц по скоростям может иметь пучковый характер.

Рассмотрим вначале простую модель (рис. 4.3). Пусть в точках $x_0 + \rho$ и $x_0 - \rho$ лежат ведущие центры частиц с ларморовскими радиусами ρ . Если плотность

ларморовских кружков $N(x)$ неоднородна, то средняя скорость частиц в точке x_0 равна

$$\bar{V}_y = \frac{v_{\perp} [N(x_0 + \rho) - N(x_0 - \rho)]}{N(x_0 + \rho) + N(x_0 - \rho)} \approx \frac{v_{\perp} \rho}{N(x_0)} \frac{\partial N(x_0)}{\partial x_0}. \quad (4.76)$$

Эта скорость направлена поперек магнитного поля и градиента плотности, т. е. мы имеем дело со своеобразным поперечным пучком, скорость которого мала по сравнению со средними скоростями частиц как отношение ларморовских радиусов к обратному градиенту плотности:

$$\bar{V}_y / v_{\perp} \approx \rho \partial \ln N / \partial x. \quad (4.77)$$

Теперь рассмотрим вопрос о распределении частиц по поперечным скоростям более строго. В случае неоднородной плазмы функция распределения удовлетворяет равновесному кинетическому уравнению

$$\mathbf{v} \nabla f_0 \cdot [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B] \partial f_0 / \partial \mathbf{v} = 0, \quad (4.78)$$

либо, что эквивалентно, она является некоторой функцией интегралов уравнений движения частиц:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B]; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \quad (4.79)$$

Интегралами уравнений (4.79) являются, например, следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\perp} &= v_{\perp}^2 / 2; & V_z &= v_z; \\ X &= x \pm v_y / \omega_B; & Y &= y - v_x / \omega_B. \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

Первые два интеграла движения соответствуют сохранению поперечной энергии и продольной скорости частиц. Интегралы $\mathbf{R} = (X, Y)$ означают неизменность во времени координаты ведущего центра частицы, вращающейся в однородном магнитном поле.

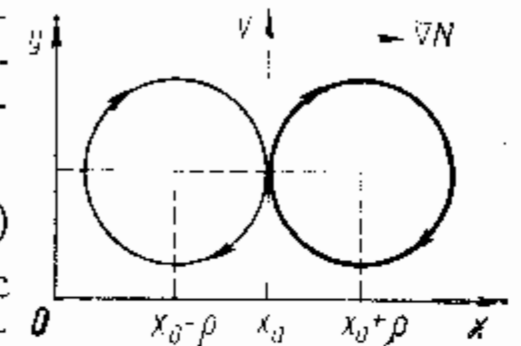


Рис. 4.3. Модель, поясняющая пучковый характер распределения частиц по скоростям, обусловленный пространственной неоднородностью

Итак, стационарная функция распределения

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = F(\varepsilon_{\perp}, V_z, X, Y), \quad (4.81)$$

где F — некоторая произвольная функция. Полагая неоднородность слабой и разлагая правую часть (4.81) в ряд по $X-x$ и $Y-y$, получаем приближенно

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = F(\varepsilon_{\perp}, V_z, x, y) + \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{e}_z]}{\omega_B} \nabla F(\mathbf{r}). \quad (4.82)$$

Пучковость f_0 (в направлении, перпендикулярном к \mathbf{B}_0) связана с наличием малой добавки в правой части (4.82). Если F — максвелловская функция с $\nabla n_0 \parallel \mathbf{x}$ и $\nabla T = 0$ и $\mathbf{k} \parallel \mathbf{y}$, то входящая в (4.75) функция f_k имеет вид

$$f_k = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} n_0 \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2T}\right) \left(1 + \frac{v_y}{\omega_B} \frac{\partial \ln n_0}{\partial x}\right). \quad (4.83)$$

При $0 < v_y < \kappa T / m\omega_B$ производная $\partial f_k / \partial v_k$ положительна, что равносильно наличию пучка. Это должно приводить к раскачке колебаний, поперечная фазовая скорость которых ω/k_y удовлетворяет условию

$$0 < \frac{\omega}{k_y} \frac{m\omega_B}{\kappa T} < 1. \quad (4.84)$$

Рассмотрим теперь пример неустойчивости, причиной которой является обсуждаемый здесь эффект несимметрии распределения частиц по углам в пространстве поперечных скоростей. Пусть в холодной однородной плазме достаточно большой плотности ($\omega_p \gg \omega_B$) имеется группа быстрых частиц с поперечной температурой T и плотностью n_1 , причем $\nabla T = 0$, $\nabla n_1 \neq 0$. Возмущения такой системы с частотами $\omega \gg \omega_B$ и $k_z = 0$ описываются локальным дисперсионным уравнением

$$1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{(kd_1)^2} \left[1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega - k_y V_y}{|k| v_{T_1}}\right] = 0. \quad (4.85)$$

Здесь $d_1^2 = T/4\pi e^2 n_1$, $V_y = \kappa T / m\omega_B$. Этот результат получается с использованием соотношений (4.75) и (4.83).

Из (4.85) следует, что раскачка колебаний имеет место как раз при условии (4.84), которое при $\text{Re } \omega = \omega_p$ сводится

к следующему:

$$k_y \kappa T / m\omega_B > \omega_p. \quad (4.86)$$

Инкремент возмущений порядка

$$\gamma \approx \alpha \omega_p^4 / (k v_T)^3; \quad \alpha = n_1 / n_0. \quad (4.87)$$

Эта величина должна удовлетворять условию $\gamma > \omega_B$. Отсюда и из (4.86) паходим, что рассматриваемая высокочастотная неустойчивость возможна только при условии

$$\rho/a > (\omega_B/\omega_p)^{1/2}. \quad (4.88)$$

Здесь предполагается, что $\alpha \approx 1$.

§ 4.7. Общие выражения для ε_0 . Относительная роль конвекции и ларморовских потоков

1. Диэлектрическая проницаемость. Выше были рассмотрены некоторые предельные случаи возмущений: $k_{\perp} \rho \rightarrow 0$, $\omega \leq \omega_B$ (в их раскачке важную роль играет конвекция) и $k_{\perp} \rho \gg 1$, $\omega \gg \omega_B$ (здесь важны ларморовские потоки). Однако чтобы составить полную картину о градиентных неустойчивостях, этого недостаточно: нужно исследовать возмущения с произвольными $k_{\perp} \rho$ и ω . При вычислении общих выражений для возмущенной плотности заряда уже нельзя следовать тем упрощенным способам, которые излагались в § 4.1, 4.4, 4.6. Необходимо развить для этого более общий подход.

Одним из регулярных способов нахождения возмущенной функции распределения является метод интегрирования по траекториям. Он уже детально обсуждался в § 5.2 т. 1 и § 1.3 данного тома. Напомним основу этого метода и воспользуемся им для вычисления возмущенной функции распределения неоднородной плазмы в магнитном поле.

Сначала в линеаризованном кинетическом уравнении совершается переход от переменных $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$ к новым переменным $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t$, где $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ — координаты и скорость частицы при $t = t_0$, находящейся в момент времени t

в точке \mathbf{r} и имеющей в этот момент скорость \mathbf{v} . При этом кинетическое уравнение записываем в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{e}{m} \nabla \psi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (4.89)$$

Здесь предположено, что возмущенное поле — потенциальное, $\mathbf{E} = -\nabla \psi$.

Уравнение (4.89) непосредственно интегрируется. После этого совершаем обратный переход к переменным \mathbf{r} , \mathbf{v} , t . С учетом временной зависимости $\psi \sim \exp(-i\omega t)$ и того, что $f(t=-\infty) = 0$, результат представляется в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t \exp[i\omega(t-t')] \nabla \psi[\mathbf{r}(t')] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}(t') dt'. \quad (4.90)$$

Теперь в (4.90) следует подставить конкретный вид f_0 и вычислить интеграл по t' . В случае неоднородной плазмы f_0 имеет вид (4.81). Поэтому входящая в (4.90) производная

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}_\perp \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} + \mathbf{e}_z \frac{\partial F}{\partial V_z} + \frac{[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\alpha]}{\omega_B} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}_\alpha}; \quad (4.91)$$

$$\mathbf{R}_\alpha = (X, Y, 0).$$

Учитывая, что величины $\partial F / \partial C$ и $C = (\epsilon_\perp, V_z, \mathbf{R}_\alpha)$ являются константами движения, они могут быть вынесены за знак интеграла по t' . После подстановки (4.91) в (4.90) получаем

$$f = \frac{e}{m} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} \int_{-\infty}^t \exp[i\omega(t-t')] \mathbf{v}_\perp \nabla \psi dt' + \frac{\partial F}{\partial V_z} \int_{-\infty}^t \exp[i\omega(t-t')] \frac{\partial \psi}{\partial z} dt' + \frac{1}{\omega_B} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}_\perp}, \int_{-\infty}^t \exp[i\omega(t-t')] \nabla_\perp \psi dt' \right]_z \right\}. \quad (4.92)$$

Координатную зависимость ψ представим в виде набора плоских волн

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(ik_z z) \int d\mathbf{k}_\perp \psi(\mathbf{k}_\perp) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp). \quad (4.93)$$

Кроме того, воспользуемся преобразованием

$$\mathbf{v}_\perp \nabla \psi = d\psi/dt + i(\omega - k_z v_z) \psi. \quad (4.94)$$

Тогда (4.92) преобразуется к виду

$$f = (e/m) \{ \psi \partial F / \partial \epsilon_\perp - G \} \int d\mathbf{k}_\perp \psi(\mathbf{k}_\perp) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp) I(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}), \quad (4.95)$$

где

$$G = \omega \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} + k_z \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} \right) + \frac{1}{\omega_B} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}}, \mathbf{k} \right]_z; \quad (4.96)$$

$$I = -i \int_{-\infty}^t \exp\{i\omega(t-t') + i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')]\} dt'. \quad (4.97)$$

Интеграл I вычислен в § 5.2 т. 1 и равен

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi) \exp[i\xi \sin(\alpha - \psi) - in(\alpha - \psi)]}{\omega - k_z v_z - n\omega_B}, \quad (4.98)$$

где $\psi = \arctg k_y/k_x$, $\xi = k_\perp v_\perp/\omega_B$, $\alpha = \arctg v_y/v_x$.

Подставляя (4.98) в (4.95) и интегрируя результат по скоростям, находим возмущенную плотность. Интегрирование по углу выполняется таким же образом, как и в случае однородной плазмы (см. § 5.2 т. 1). Предварительно надо, однако, выделить угловую зависимость в F , представив F в виде ряда (4.82).

Вычислив возмущенную плотность, находим по способу, указанному в § 4.1, вклад рассматриваемой группы частиц (индекс α) в диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon_0^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = -\frac{4\pi e^3}{mk^2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \epsilon_\perp} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\xi) G_1}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \right\rangle. \quad (4.99)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает $\int (\dots) v_\perp dv_\perp dv_z$, а функция

$$G_1 = G + (n/k^2) [\nabla G, \mathbf{k}]_z. \quad (4.100)$$

При максвелловском F из (4.99) следует

$$\epsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd)^2} \left\{ 1 + i\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\tilde{l} + (\tilde{l} - 1) \frac{n\omega}{z\omega_B} \right] \times \right.$$

$$\times \frac{\omega}{|k_z| v_T} \mathcal{W} \left(\frac{\omega - n\omega_B}{|k_z| v_T} \right) I_n(z) e^{-z}. \quad (4.101)$$

Здесь $z = k_{\perp}^2 T / m\omega_B^2$, I_n — функция Бесселя мнимого аргумента;

$$\mathcal{W}(x) = \exp(-x^2) \left[1 + (2i/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{t^2} dt \right],$$

а оператор \hat{L} равен

$$\hat{L} = 1 - \frac{k_y T}{m\omega\omega_B} \left(\frac{\partial \ln n_0}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} \right). \quad (4.102)$$

Отметим вытекающие из (4.99) и (4.101) некоторые предельные результаты.

а. Низкочастотные возмущения, $(\omega, k_z v_T) \ll \omega_B$:

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd)^2} \left[1 + i\sqrt{\pi} \hat{L} \frac{\omega}{|k_z| v_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{W} \left(\frac{\omega - n\omega_B}{|k_z| v_T} \right) I_n e^{-z} \right]. \quad (4.103)$$

б. Возмущения с $\omega \geq \omega_B$, $k_{\perp} \rho \geq 1$:

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd)^2} \left[1 + i\sqrt{\pi} \hat{L} \frac{\omega}{|k_z| v_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{W} \left(\frac{\omega - n\omega_B}{|k_z| v_T} \right) I_n e^{-z} \right]. \quad (4.104)$$

в. Возмущения с $\gamma \gg \omega_B$, $k\rho \gg 1$:

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd)^2} \left(1 + i\sqrt{\pi} \hat{L} \frac{\omega}{k v_T} \right). \quad (4.105)$$

При произвольном F и малых частотах возмущений $|\omega - k_z v_z| \ll \omega_B$ из (4.99) вытекает

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \left\langle \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} - \frac{GJ_0^2}{\omega - k_z v_z} \right\rangle. \quad (4.106)$$

В частности, при $F \sim \exp[-(m/2)(v - V)^2/2T]$, $V \parallel z$ это означает:

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = \frac{1}{(kd)^2} \left[1 + i\sqrt{\pi} (\omega - k_z V) \left(\hat{L} - \frac{k_y T}{m(\omega - k_z V)\omega_B} \times \right. \right.$$

$$\times \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial V} \left. \right) \frac{I_0(z) e^{-z}}{|k_z| v_T} \mathcal{W} \left(\frac{\omega - k_z V}{|k_z| v_T} \right) \right]. \quad (4.107)$$

В предельном случае $T \rightarrow 0$, отсюда можно получить дисперсионное уравнение (4.45).

2. Относительная роль конвекции и ларморовских потоков. Как было показано выше, специфичным свойством неоднородной плазмы, находящейся в магнитном поле, является зависимость ее диэлектрической проницаемости от градиентов стационарной функции распределения [см., например, (4.99)]. Наличие в ε_0 градиентных членов обусловлено двумя основными эффектами: конвекцией частиц в возмущенном поле и асимметрией стационарной функции распределения по углам в пространстве поперечных скоростей. При анализе различных предельных случаев возмущений мы руководствовались физической идеей о том, что в случае длинноволновых возмущений определяющей является конвекция, а в случае коротковолновых — асимметрия.

Обсудим теперь, как эти два эффекта можно отделить друг от друга при произвольных частотах и длинах волн. Вклад конвекции в $\varepsilon_0^{(\alpha)}$ будем характеризовать формулой (4.23). Чтобы найти его конкретное выражение, нужно, исходя из (4.95), вычислить ε_{ij} . Вклад в $\varepsilon_0^{(\alpha)}$, обусловленный скоростью асимметрии f_0 , $\varepsilon_{0 \text{ асим}}^{(\alpha)}$, можно найти, вычислив часть возмущенной плотности, обусловленную вторым слагаемым в (4.82). Это делается с помощью формулы (4.90), в правую часть которой вместо f_0 должно быть подставлено указанное слагаемое.

Точное совпадение градиентной части $\varepsilon_0^{(\alpha)}$, определяемой из формулы (4.99), и суммы $\varepsilon_{0 \text{ конв}}^{(\alpha)} + \varepsilon_{0 \text{ асим}}^{(\alpha)}$ получается при $k_z = 0$, т. е. как раз тогда, когда $\varepsilon_{0 \text{ конв}}^{(\alpha)}$ не зависит от ε_z/k_j , а само определение $\varepsilon_{0 \text{ конв}}^{(\alpha)}$ наиболее строгое. Если же $k_z \neq 0$, то равенство $\varepsilon_{0 \text{ град}}^{(\alpha)} = \varepsilon_{0 \text{ конв}}^{(\alpha)} + \varepsilon_{0 \text{ асим}}^{(\alpha)}$ имеет место в следующих случаях: а) $\xi \ll 1$, $\omega \ll \omega_B$; б) $\xi > 1$. В первом случае, как уже отмечалось выше, $\varepsilon_{0 \text{ град}}^{(\alpha)} \rightarrow \varepsilon_{0 \text{ конв}}^{(\alpha)}$, $\varepsilon_{0 \text{ асим}}^{(\alpha)} \rightarrow 0$, а во втором $\varepsilon_{0 \text{ град}}^{(\alpha)} = \varepsilon_{0 \text{ асим}}^{(\alpha)}$, $\varepsilon_{0 \text{ конв}}^{(\alpha)} \rightarrow 0$. Это оправдывает принятый в предыдущих параграфах приближенный подход к учету градиентных эффектов.

Библиографический обзор к гл. 4

Работы, в которых были получены уравнения колебаний плазмы с учетом градиентных эффектов

1. Церковников Ю. А. Устойчивость плазмы в сильном магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 32, с. 67. Решено кинетическое уравнение для возмущений с $k_{\parallel} = 0$, $\omega \ll \omega_B$.
2. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле. — «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, с. 581.
Рассмотрены возмущения с $k_{\perp} \rho \rightarrow 0$, $\omega/\omega_B \rightarrow 0$, $k_{\parallel} \neq 0$.
3. Krall N. A., Rosenbluth M. N. Trapping instabilities in slightly inhomogeneous plasma. — «Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 1435. Исследованы возмущения с $k_{\parallel} = 0$ и произвольными ω/ω_B , $k_{\perp} \rho$.
4. Михайловский А. Б. Диэлектрические свойства неоднородной плазмы. — «Ядерный синтез», 1962, т. 2, с. 162.
5. Кадомцев Б. Б., Тимофеев А. В. Дрейфовая неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 146, с. 581.
В работах [4, 5] кинетическое уравнение решалось при произвольных k_{\perp} , $k_{\perp} \rho$, ω/ω_B .

Работы, в которых исследовались градиентные неустойчивости

6. Михайловский А. Б. К теории устойчивости пространственно-неоднородного тока в плазме. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1945.
Рассмотрена раскачка плазмы пучком с неоднородной плотностью, § 4.2, 4.4.
7. Михайловский А. Б., Рухадзе А. А. О неустойчивости электронных волн в неоднородных плазменных потоках. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 2143.
Исследовалась неустойчивость потока с неоднородным профилем скорости, § 4.3.
8. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. Высокочастотная дрейфовая неустойчивость плазмы. — «Докл. АН СССР», 1965, т. 165, с. 796.
Рассмотрена неустойчивость электронной компоненты плазмы за счет градиента температуры, § 4.5.
9. Михайловский А. Б., Юнгвирт К. О роли конвективных эффектов при возбуждении электронных колебаний плазмы ограниченным пучком. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 777.
Проанализированы раскачка колебаний пучком малой плотности и раскачка собственных колебаний цилиндра плазмы как за счет продольной, так и за счет поперечной энергии пучка.
10. Jungwirth K. Cyclotron instabilities of a two-component electron plasma. — «Czech. J. Phys.», 1967, v. B17, p. 498.
Рассмотрена раскачка колебаний плазмы пучком с конечной поперечной энергией (§ 4.6).
11. Jungwirth K. Plasma instabilities excited by an azimuthal electron beam. — «Czech. J. Phys.», 1968, v. B18, p. 629.

Исследуется раскачка колебаний плазмы азимутальным электронным пучком.

12. Незлин М. В., Тактакашвили М. И., Трубников А. С. Пороги пучковых неустойчивостей. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 397.
Обсуждается вопрос о порогах пучковых неустойчивостей с учетом эффектов конвекции (§ 4.2).

Глава 5

ИОННО-ЦИКЛОТРОННЫЕ И ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ С КОНЕЧНЫМ ЛАРМОРОВСКИМ РАДИУСОМ ИОНОВ И ЭЛЕКТРОНОВ

§ 5.1. Плазма с горячими максвелловскими ионами

1. Предварительные замечания. Пусть имеется неоднородная плазма с максвелловским распределением по скоростям ионов и электронов и $T_i \geq T_e$. Сделаем ориентировочные оценки, насколько большой должна быть степень неоднородности плазмы, чтобы было возможно развитие неустойчивостей с частотами, сравнимыми с ионно-циклотронной ($\omega \gtrsim \omega_{Bi}$).

Согласно результатам предыдущей главы, градиентные эффекты в максвелловской плазме важны, если только частота возмущений не слишком велика:

$$\omega \leq k_y v_{Te} / a. \quad (5.1)$$

Это не противоречит условию $\omega \geq \omega_{Bi}$, если

$$\rho_i / a > 1 / k_y \rho_i. \quad (5.2)$$

Это неравенство выполняется тем легче, чем больше k_y . Однако k_y не может быть сколь угодно большим: поперечная длина волны возмущения во всяком случае не должна быть существенно меньше ларморовского радиуса электронов:

$$k_{\perp} \rho_e \leq 1, \quad (5.3)$$

так как в противном случае, как вытекает из (4.104), градиентные эффекты были бы вообще не важны. Из (5.2) и (5.3) получаем, что рассматривать градиент-

ные неустойчивости с $\omega \approx \omega_{Bi}$ в плазме с $T_i \approx T_e$ имеет смысл только при

$$\rho_i/a \geq (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Такую плазму будем называть плазмой с конечным ларморовским радиусом ионов.

Отметим теперь, какие именно градиентные эффекты могут быть важны в возмущениях с $\omega \approx \omega_{Bi}$. Поскольку эти возмущения являются коротковолновыми по отношению к ионам [$k_{\perp} \rho_i \gg 1$, критерий (5.2)], то, согласно замечаниям, сделанным в § 4.7, здесь может быть важен только эффект ионных ларморовских потоков, но заведомо не существенна конвекция ионного заряда. По отношению к электронам возмущения являются длинноволновыми ($k_{\perp} \rho_e < 1$), поэтому в них может быть важна электронная конвекция, но заведомо не важны электронные ларморовские потоки.

Последующие вычисления покажут наличие неустойчивостей, связанных с отмеченными выше градиентными эффектами. Раскачка колебаний будет обязана ионным ларморовским потокам, тогда как наличие раскачиваемой ветви колебаний обусловлено конвекцией электронов.

2. Циклотронная неустойчивость при $k_z = 0$. Рассмотрим возмущения с $k_z = 0$, $z_i \gg 1$, $z_e < 1$, $\omega \approx \omega_{Bi}$ в плазме с $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$, $T_i > T_e$. При этих предположениях из (4.103) и (4.104) следует:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0^{(e)} &= \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^2 + \frac{\kappa k_y \omega_{pe}^2}{\omega \omega_{Be} k^2}; \\ \varepsilon_0^{(i)} &= \frac{1}{(k_{\perp} d_i)^2} \left[1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega - \omega_{ni}}{\sqrt{2\pi z_i} (\omega - \omega_{Bi})} \right]; \\ \omega_{ni} &\equiv k_y \kappa c T_i / e_i B_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

так что дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left[1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^2 + \frac{1}{(k_{\perp} d_i)^2} \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \right] \times \left[1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi z_i}} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} \right] = 0. \quad (5.6)$$

В пренебрежении членами с ω_{ni} это уравнение описывает ионно-циклотронные колебания однородной плазмы, рассмотренные в § 6.4 т. 1. Видно, что приближение однородной плазмы применимо только при условии $n\omega_{Bi} \gg \omega_{ni}$. Если $n\omega_{Bi} \leq \omega_{ni}$, то ионно-циклотронные ветви колебаний имеют следующий закон дисперсии:

$$\omega_n(k) = n\omega_{Bi} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi z_i}} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{ni}}{n\omega_{Bi}} + (kd_i)^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)} \right]. \quad (5.7)$$

Помимо циклотронных ветвей (5.7) уравнение (5.6) описывает еще одну ветвь колебаний, частота которой вдали от циклотронных гармоник

$$\omega = \xi(k) \omega_{ni}, \quad (5.8)$$

где $\xi(k) = [1 + (kd_i)^2 (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)]^{-1}$. Ветви (5.7) и (5.8) пересекаются, если

$$(\rho_i/a)^2 > 4n^2 [(\omega_{Bi}/\omega_{pi})^2 + m_e/m_i]; \quad a \equiv \kappa^{-1}. \quad (5.9)$$

Решения (5.6) для этого случая представлены на рис. 5.1.

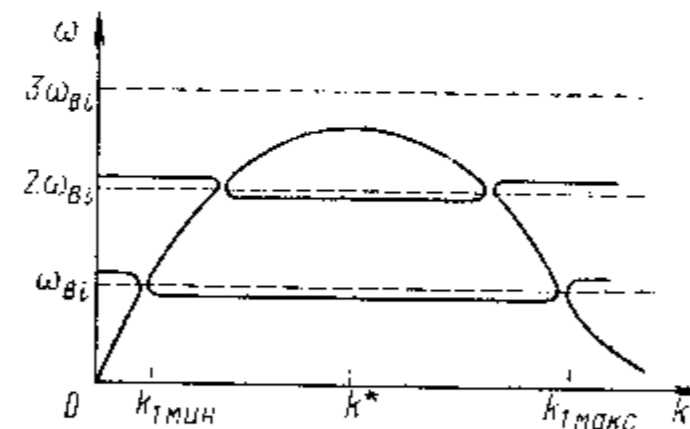


Рис. 5.1. Ветви колебаний неоднородной плазмы при $k_z = 0$. Здесь $k^* = \min[1/d_i, (m_i/m_e)^{1/2} \rho_i^{-1}]$

Вблизи $k = k_n$, соответствующего точке пересечения ветвей, частота колебаний комплексна, т. е. плазма неустойчива. Приведем соотношения, характеризующие неустойчивость в предельных случаях плотной и разреженной плазмы.

а. Плотная плазма, $\omega_{pe} > \omega_{Be}$. Такая плазма неустойчива при

$$\rho_i/a > 2(m_e/m_i)^{1/2}. \quad (5.10)$$

Если равенство (5.10) не сильное, то возбуждается небольшое число гармоник. Характерное k_{\perp} в этом случае порядка $k_{\perp} \approx (m_i/m_e)^{1/2} \rho_i^{-1}$. Инкремент колебаний

$$\gamma \approx (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{Bi}. \quad (5.11)$$

Если левая часть (5.10) намного больше правой, то число возбуждаемых гармоник

$$n \approx (\rho_i/2a)(m_i/m_e)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Инкременты первой и наивысшей из возбуждаемых гармоник приближенно равны

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{n=1} &\approx (\rho_i/a)^{1/2} \omega_{Bi}; \\ \gamma_{\max} &\approx (8\pi)^{-1/2} (\rho_i/a)(m_i/m_e)^{1/2} \omega_{Bi}. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Отсюда, в частности, видно, что инкремент становится порядка ω_{Bi} при $\rho_i/a \approx 2(m_e/m_i)^{1/2}$. Неустойчивость плазмы с $\rho_i/a > 2(m_e/m_i)^{1/2}$ рассмотрим в п. 3.

б. Плазма с $\omega_{pe} < \omega_{Be}$. Из (5.9) следует, что циклотронная неустойчивость не развивается, если плотность плазмы слишком мала:

$$\omega_{pi}/\omega_{Bi} < a/2\rho_i. \quad (5.14)$$

В частности, плазма устойчива при любых ρ_i/a , если $\omega_{pi} < \omega_{Bi}$.

Предположим теперь $a/2\rho_i \leq \omega_{pi}/\omega_{Bi} < (m_i/m_e)^{1/2}$. В этих условиях имеет место неустойчивость с характерным инкрементом

$$\gamma \approx (\rho_i/a)^{1/2} \omega_{Bi} \approx (\omega_{Bi}/\omega_{pi})^{1/2} \omega_{Bi} \quad (5.15)$$

и характерным волновым числом $k_{\perp} \approx 1/d_i$.

3. Высокочастотная неустойчивость сильнонеоднородной плазмы. Пусть

$$\rho_i/a > (m_e/m_i)^{1/2} (1 + \omega_{Be}^2/\omega_{pe}^2)^{-1/2}. \quad (5.16)$$

При этом в уравнении (5.6) необходимо учитывать не один, а несколько членов суммы по n . Предположив

$\gamma > \omega_{Bi}$, перейдем в (5.6) к высокочастотному приближению, сделав замену:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega - n\omega_{Bi})^{-1} \rightarrow \int (\omega - n\omega_{Bi})^{-1} dn. \quad (5.17)$$

Удерживая в (5.6) только мнимый вклад интеграла (5.17), получаем

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^2 + \frac{1}{(kd_i)^2} \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \left(1 + \frac{i\sqrt{\pi}\omega}{kv_{Ti}} \right) = 0. \quad (5.18)$$

Это уравнение можно получить также, используя формулы (4.105). При этом можно было бы убедиться, что мнимые члены в (5.18) обязаны резонансному взаимодействию с волной частиц, у которых скорости удовлетворяют условию $\omega = kv$.

Из (5.18) видно, что при $\omega < \omega_{ni}$ $\omega \text{Im}\epsilon_0 < 0$, т. е. энергия резонансных частиц передается колебаниям. Этот эффект отрицательной проводимости обязан асимметрии поперечного распределения частиц по скоростям. Вещественная часть частоты колебаний (5.18) удовлетворяет условию (5.8), а инкремент приближенно равен

$$\gamma_{\max} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}} \left(\frac{\rho_i}{a} \right)^2 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{-1/2} \omega_{Bi}. \quad (5.19)$$

При условии $\rho_i/a \approx 2(m_e/m_i)^{1/2}$ и $\omega_{pe} < \omega_{Be}$ этот результат с точностью до численного множителя совпадает с (5.18), так что приближение непрерывного спектра плавно сшивается с приближением отдельных гармоник. Качественно зависимость инкремента от параметра ρ_i/a , вытекающая из (5.13) и (5.19), представлена на рис. 5.2 (для плазмы с $\omega_{pe} > \omega_{Be}$).

На границе приближения малого ларморовского радиуса $\rho_i \approx a$ с точностью до численного множителя из (5.19) следует

$$\gamma \approx \omega_{pi} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.20)$$

В этом случае некомпенсированные ларморовские потоки порядка тепловых $V_{\perp} \omega_i \approx v_{Ti}$ (см. § 4.6). Случай $V_{\perp} \omega_i \geq v_{Ti}$ соответствует ионному азимутальному потоку. Устойчивость такого потока рассмотрена в § 5.5.

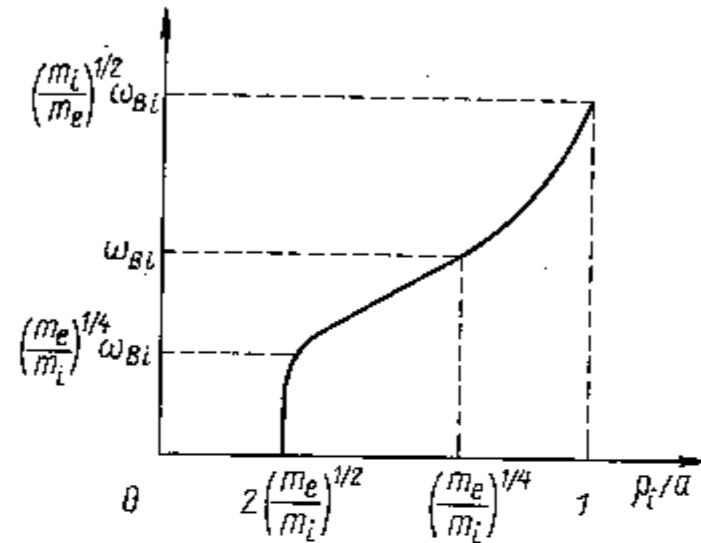


Рис. 5.2. Инкремент неустойчивости плазмы с конечным ρ_e/a и $\omega_{pe} > \omega_{Be}$

§ 5.2. Плазма с горячими максвелловскими электронами

1. Предварительные замечания. Рассмотрим раскачку возмущений с $\omega \geq \omega_{Bi}$ в плазме, электроны которой горячее ионов, $T_e > T_i$.

В § 5.1 качественно было получено неравенство $\rho_e/a > (m_e/m_i)^{1/2}$ [см. (5.4)], означающее возможность градиентной раскачки возмущений с $\omega \geq \omega_{Bi}$ в плазме с $T_e \geq T_i$. Для случая плазмы с $T_e \gg T_i$ этот критерий должен быть уточнен следующим образом. В соотношение (5.1) нужно подставить большую из температур, т. е. T_e , и тогда вместо (5.4) будем иметь

$$\rho_e/a > m_e/m_i. \quad (5.21)$$

Это соответствует плазме с конечным ларморовским радиусом электронов.

При достаточно большом T_e/T_i плазма, оставаясь слабонеоднородной по отношению к ионам, $\rho_i \ll a$, может быть такой, что

$$\rho_e/a > (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (5.22)$$

В этом случае характерная градиентная частота $\omega \approx k_y v_{Te} \rho_e/a$ наиболее коротковолновых возмущений $k_{\perp} \rho_e \approx 1$ значительно превышает ω_{Bi} и сравнивается с гибридной. В этих условиях возможна раскачка высокочастотных возмущений $\omega \gg \omega_{Bi}$ и, в частности, высокочастотных ионно-звуковых.

2. Плазма с $\rho_e/a \geq (m_e/m_i)^{1/2}$. Как вытекает из качественных соображений п. 1, в такой плазме следует ожидать раскачку возмущений с $\omega \gg \omega_{Bi}$. Согласно (4.101), (4.103), выражение для диэлектрической проницаемости электронов и ионов в этом случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0^{(e)} &= (kd_e)^{-2} \left[1 + i \sqrt{\pi} \hat{I}_e \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} I_0(z_e) e^{-z_e} \right]; \\ \epsilon_0^{(i)} &= -(\omega_{pi}/\omega)^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

а. Возмущения с $\omega \ll k_z v_{Te}$. В этом случае дисперсионное уравнение $1 + \epsilon_0^{(e)} + \epsilon_0^{(i)} = 0$ сводится к следующему:

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{(kd_e)^2} \left[1 + \frac{i \sqrt{\pi} (\omega - \omega_{ne})}{|k_z| v_{Te}} I_0(z_e) e^{-z_e} \right] - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega} \right)^2 = 0. \quad (5.24)$$

Для простоты здесь предположено $\nabla T = 0$. Уравнение (5.24) описывает высокочастотные ионно-звуковые колебания, обсуждавшиеся при $\nabla n_0 = 0$ в § 6.3 т. 1.

Из (5.24) находим, что инкремент колебаний

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} (\text{Re } \omega)^2}{2 |k_z| v_{Te}} I_0(z_e) e^{-z_e} \left(\frac{\omega_{ne}}{\text{Re } \omega} - 1 \right) \frac{1}{1 + (kd_e)^2}, \quad (5.25)$$

где $\text{Re } \omega = k (T_e/m_i)^{1/2} (1 + k^2 d_e^2)^{-1/2}$. При $kd_e \leq 1$ условие неустойчивости ($\gamma > 0$) имеет вид

$$\rho_e/a > (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (5.26)$$

Более коротковолновые возмущения раскачиваются при меньших ρ_e :

$$\frac{\rho_e}{a} > \frac{1}{kd_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}.$$

б. Возмущения с $\omega \geq k_z v_{Te}$. Согласно (5.25), отношение $\gamma/\text{Re } \omega$ растет с уменьшением $\cos \theta$. Пусть $k < (1/\rho_e, 1/d_e)$. В этом случае при $\cos \theta \approx (m_e/m_i)^{1/2}$

$$\gamma \approx \text{Re } \omega \approx k(T_e/m_i)^{1/2}. \quad (5.27)$$

В силу условия (5.26) инкремент (5.27) превосходит ω_{Bi} даже при максимально возможных $k \approx k_n$.

Для плазмы с $\omega_{pe} < \omega_{ve}$ выражение (5.27) справедливо вплоть до $k_{\text{макс}} \approx 1/d_e$; при таких k

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{pi}. \quad (5.28)$$

В случае более плотной плазмы $\omega_{pe} > \omega_{ve}$ в качестве $k_{\text{макс}}$ в (5.27) следует полагать $1/\rho_e$, тогда

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{\text{гибр}} \equiv |\omega_{Be} \omega_{Bi}|^{1/2}. \quad (5.29)$$

При $\cos \theta \leq (m_e/m_i)^{1/2}$ инкремент падает. В этом убеждаемся, полагая в (5.23) $\omega > k \cdot v_{Ti}$.

3. Плазма с $(T_i/T_e)^{1/2} < \rho_0/a < 1$. а. Раскачка высокочастотных ионно-звуковых колебаний. При $\rho_0/a < 1$ ветвь высокочастотных ионно-звуковых колебаний раскачивается, только если $kd_e \gg 1$. Полагая в (5.24) $kd_e \gg 1$, находим

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= \omega_{pi} \\ \gamma &= \frac{\sqrt{\pi} \omega_{pi}^2}{2 |k_z| v_{Te}} I_0(z_e) e^{-z_e} \left(\frac{\omega_{ne}}{\omega_{pi}} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Инкремент положителен при

$$k > a/d_e \rho_0; \quad \rho_0^2 \equiv T_e/m_i \omega_{Bi}^2. \quad (5.31)$$

Как функция k_z инкремент максимален при $k_z \approx \omega_{pi}/v_{Te}$; по порядку величины

$$\gamma_{\text{макс}} \approx I_0(z_e) e^{-z_e} \omega_{pi}. \quad (5.32)$$

Условие (5.31) не противоречит приближению холодных ионов $\omega > kv_{Ti}$, если $k < 1/d_i$, т. е. при

$$\rho_0/a > (T_i/T_e)^{1/2}. \quad (5.33)$$

Из (5.31), (5.32) следует, что в плотной плазме, $\omega_{pe} > \omega_{ve}$, максимальный инкремент

$$\gamma_{\text{макс}} \approx v_{Te}/a, \quad (5.34)$$

в менее плотной плазме, $\omega_{pe} < \omega_{ve}$,

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{pi}. \quad (5.35)$$

б. Раскачка ионно-циклотронных гармоник. Наряду с высокочастотными возмущениями п. 2а в плазме с $\rho_0/a > (T_i/T_e)^{1/2}$ могут раскачиваться также ионно-циклотронные гармоники. Пренебрегая в (4.104) членами порядка ω_{ni}/ω и полагая $|\omega - n\omega_{Bi}| \gg \gg k_z v_{Ti}$, вместо (5.24) получаем дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{1}{(kd_i)} \left(1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega I_n(z_i) e^{-z_i}}{\omega - n\omega_{Bi}} \right) + \frac{1}{(kd_e)^2} \left[1 + \frac{i\sqrt{\pi}(\omega - \omega_{ne})}{|k_z| v_{Te}} \right] = 0. \quad (5.36)$$

Условие неустойчивости $\omega \leq \omega_{ne}$ при $\omega \approx n\omega_{Bi}$ означает

$$\sqrt{z_i} \geq (T_i/T_e)^{1/2} a/\rho_0. \quad (5.37)$$

Видно, что в плазме с $\rho_0/a > (T_i/T_e)^{1/2}$ могут раскачиваться возмущения с $z_i < 1$ (а не только с $z_i > 1$). В этом случае уравнение (5.36) сводится к следующему:

$$1 - \frac{z_i \omega_{Bi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} - \sum_{|n| \geq 2} \frac{\omega I_n(z_i) e^{-z_i}}{\omega - n\omega_{Bi}} + \frac{T_i}{T_e} \left[1 + \frac{i\sqrt{\pi}(\omega - \omega_{ne})}{|k_z| v_{Te}} \right] = 0. \quad (5.38)$$

Здесь $I_n e^{-z_i}$ — малый параметр, поэтому (5.38) имеет решение с $\omega \approx n\omega_{Bi}$ ($n=2, 3, \dots$). Только эти гармоники и раскачиваются при $z_i < 1$; возмущения первой гармоники в этом случае затухают.

Если же $z_i \gg 1$, то раскачиваются гармоники со всеми n , включая $n=1$. В этом случае

$$\gamma \approx v_{Ti}/a. \quad (5.39)$$

Здесь предположено $n \approx 1$, $k_z v_{Te} \approx \omega_{Bi}$, $z_i \approx (a/\rho_i)^2$.

4. Плазма с $(m_e/m_i)^{1/2} < \rho_i/a < (T_i/T_e)^{1/2}$. В этом случае градиентные члены дисперсионного уравнения важны, если $\omega \approx n\omega_{Bi}$, $z_i \gg 1$. Полагаем в (4.103), (4.104)

$|\omega - n\omega_{Bi}| \gg k_z v_{Ti}$, $z_i \gg 1$, $z_e \ll 1$, $\nabla T = 0$. Тогда получаем уравнение вида (5.36), в котором следует считать $z_i \gg 1$. Вещественная часть частоты колебаний при $k_z v_{Te} < n\omega_{Bi}$ близка к $n\omega_{Bi}$ и определяется уравнением (6.4) т. 1. Инкремент

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2z_i}} \frac{T_i}{T_e} \frac{(n\omega_{Bi})^2}{|k_z| v_{Te}} \left(\frac{\omega_{pe}}{n\omega_{Bi}} - 1 \right) \exp \left[- \left(\frac{n\omega_{Bi}}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] \quad (5.40)$$

Плазма неустойчива при условии (5.37). Согласно последнему условию и исходному предположению настоящего пункта, $\rho_0/a < (T_i/T_e)^{1/2}$, раскачиваются только коротковолновые возмущения $z_i \gg 1$. Неустойчивость обусловлена конвекцией резонансных электронов.

Как функция k_z инкремент достигает максимума при $k_z \approx n\omega_{Bi}/v_{Te}$. По порядку величины γ_{\max} определяется формулой (5.39).

§ 5.3. Плазма с немаксвелловским распределением ионов по поперечным скоростям. Конусно-градиентная неустойчивость

В плазме с немаксвелловскими ионами ($\partial f_{\perp i}/\partial v_{\perp} > 0$) могут развиваться неустойчивости, для которых градиентные эффекты не важны. Основной из них является рассмотренная в § 12.1 т. 1 высоочастотная неустойчивость ($\gamma > \omega_{Bi}$). При этом раскачиваются возмущения, у которых $k_z \neq 0$. Теперь учтем градиентные эффекты и рассмотрим возмущения с $k_z = 0$.

Итак, полагаем $k_z = 0$, $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$, $\gamma > \omega_{Bi}$. Для описания ионов используем высоочастотное приближение. Конечностью ларморовского радиуса электронов пренебрегаем ($z_e \rightarrow 0$). Фазовую скорость колебаний ω/k_y считаем большой по сравнению со средними скоростями поперечного движения компонент $V_{\perp e}$, $V_{\perp i}$, т. е. $\omega/k_y \gg v_{Ti} \rho_i/a$. При этих предположениях из (4.75), (4.103) вытекает дисперсионное уравнение

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^2 + \frac{\kappa_n k_y \omega_{pe}^2}{\omega \omega_{pe} k^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{k} \right)^2 \int \frac{k v \partial f_{oi}/\partial v_{\perp}}{\omega - k v} dv = 0. \quad (5.41)$$

Здесь $f_{oi}(v_{\perp})$ нормировано на единицу, $v_{\perp} \equiv v_{\perp}^2/2$.

1. **Плазма с δ -функциональным распределением ионов.** Сначала рассмотрим простейшее распределение $f_{oi} = \delta(v_{\perp} - v_0^2/2)$. Полагая также $\omega \ll k_{\perp} v_0$, приводим (5.41) к виду

$$1 + \frac{\bar{\omega}}{\omega} - \frac{i\omega}{k_{\perp} v_0} \left(\frac{k_{\perp}^{(0)}}{k} \right)^2 = 0. \quad (5.42)$$

Здесь $\bar{\omega} = k_y \kappa_n \omega_{pe}^2 [k^2 \omega_{Be} (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)]^{-1}$, а $k_{\perp}^{(0)}$ определено соотношением $k_{\perp}^{(0)2} = (\omega_{pi}/v_0)^2 (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{-1}$.

Уравнение (5.42) сходно с (12.1) т. 1. Отличие состоит только в том, что вместо инерционного продольного движения электронов теперь учитывается их конвективное движение (см. п. 1 § 4.1).

Корни уравнения (5.42) комплексны. Один из них имеет положительную мнимую часть $\gamma > 0$, что соответствует неустойчивости. Исходное предположение $\gamma > \omega_{Bi}$ оправдывается, если

$$(\rho_i/a)^{1/2} > (\omega_{Bi}/\omega_{pi})^2 (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2). \quad (5.43)$$

Это соотношение играет роль приближенного условия неустойчивости. [Более точное условие неустойчивости, найденное Постом и Розенблютом, отличается от (5.43) наличием в правой части множителя 0,38.]

Максимальный инкремент раскачивающихся возмущений

$$\gamma_{\max} \approx \text{Re } \omega \approx \left(\frac{\rho_i}{a} \right)^{1/2} \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (5.44)$$

Он достигается при

$$k^2 \approx \frac{1}{d_0^2} \frac{(\rho_i/a)^{1/2}}{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2} \quad (d_0 = v_0/\omega_{pi}). \quad (5.45)$$

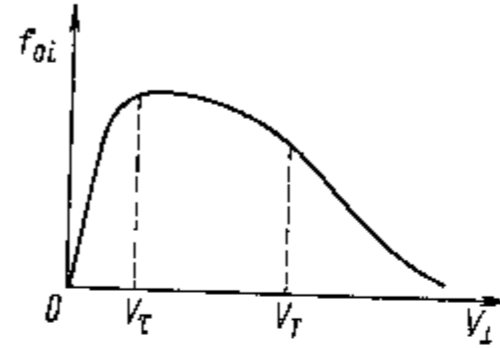
2. **Размытое распределение ионов с $\partial f_{oi}/\partial v_{\perp} > 0$.** Исследование устойчивости размытых распределений с $\partial f_{oi}/\partial v_{\perp} > 0$ проведем на примере

$$f_{oi} = \frac{m(T_{\perp} + \tau)}{T^2} \exp \left(- \frac{mv_{\perp}^2}{2T} \right) \left(1 - \exp \left(- \frac{mv_{\perp}^2}{2\tau} \right) \right). \quad (5.46)$$

(Это распределение обсуждалось также в § 12.1 т. 1, где было принято $\nabla n_0 = 0$.)

Если считать $T > \tau$, то параметру T можно придать смысл температуры, а величина $(\tau/m_i)^{1/2}$ будет характеризовать масштаб скорости, ниже которой $\partial f_{oi}/\partial v_{\perp} > 0$

Рис. 5.3. Функция распределения ионов, соответствующая неравновесному распределению вида (5.46)



(рис. 5.3). При f_{oi} вида (5.46) вместо (5.42) получаем дисперсионное уравнение

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}\right)^2 + \frac{\kappa_n k_y \omega_{pe}^2}{\omega \omega_{pe} k^2} + \frac{i\sqrt{\pi}}{k^2 d_{\text{эф}}^2} \left[\frac{1}{v_T} \left(\omega - \frac{k_y \kappa T}{m_i \omega_{Bi}} \right) - \frac{1}{v_1} W\left(\frac{\omega}{k v_1}\right) \left(\omega - \frac{\kappa_n k_y v_1^2}{2\omega_{Bi}} \right) \right] = 0. \quad (5.47)$$

Здесь $d_{\text{эф}}^2 = T^2 / [(T + \tau) m_i \omega_{pi}^2]$ — квадрат эффективного радиуса Дебая; $v_T = (2T/m_i)^{1/2}$; $v_1 = [2T\tau/m_i (T + \tau)]^{1/2}$. В (5.47) предположено $\omega < k v_{Ti}$; оставлены также члены порядка $k_y v_{oi}/\omega$. Если τ и T одного порядка, то (5.47) принимает вид

$$1 + \frac{\bar{\omega}}{\omega} - \frac{i\sqrt{\pi}\omega}{k^2 v_1} \left[1 - \left(\frac{\tau}{T + \tau}\right)^{1/2} \right] \frac{1}{d_{\text{эф}}^2 (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)} = 0. \quad (5.48)$$

Это уравнение отличается от (5.42) только численным коэффициентом (порядка единицы) в последнем члене левой части. Поэтому результаты, вытекающие из (5.48), качественно те же, что и при δ -функциональном распределении ионов (см. п. 1).

Нечувствительность свойств возмущений к детальному виду функции распределения $f_0(v_{\perp}^2)$ объясняется

тем, что в дисперсионное уравнение входит не сама функция f_{oi} , а ее интеграл по одной из компонент скорости (например, $\int f_{oi} dv_x$, если k направлено по оси y). Для δ -функционального распределения и для f_{oi} вида (5.46) эти интегралы при малых v_y равны соответственно

$$\frac{1}{2\pi} \int f_{oi} dv_x = \begin{cases} \frac{1}{2\pi v_0} \left(1 + \frac{v_y^2}{2v_0^2} \right); \\ \frac{1}{\sqrt{\pi} v_T} \left(1 + \frac{T}{\tau} \right) \left[1 - \left(\frac{\tau}{T + \tau} \right)^{1/2} \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{m_i v_y^2}{2T} \left(\frac{T + \tau}{\tau} \right)^{1/2} \right]. \end{cases} \quad (5.49)$$

Видно, что при $T \approx \tau$ оба выражения качественно эквивалентны и при любой форме f_{oi} высокочастотная неустойчивость описывается примерно такими же соотношениями, как и в случае δ -функции, если при скоростях, меньших или порядка средней, $\partial \ln f_{oi} / \partial \ln v_{\perp} \geq 1$.

Рассмотрим теперь плазму с $v^{\tau}/v_T \ll 1$ (см. рис. 5.3). При $v_{\tau}/v_T > \rho_i/a$ вместо соотношений (5.43), (5.45) из (5.47) следует:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\rho_i}{a}\right)^{2/3} &> \left(\frac{v_T}{v_{\tau}}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega_{Bi}}{\omega_{pi}}\right)^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2}\right); \\ \gamma \approx \text{Re } \omega &\approx \left(\frac{\rho_i}{a}\right)^{3/4} \left(\frac{v_{\tau}}{v_T}\right)^{1/4} \frac{\omega_{pi}}{(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}}; \\ k^2 &\approx \frac{1}{d^2} \frac{1}{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2} \left(\frac{\rho_i}{a} \frac{v_T}{v_{\tau}}\right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Из первого соотношения видно, что зависимость критического значения параметра ρ_i/a от v_{τ}/v_T относительно слабая, $\rho_i/a \sim (v_T/v)^{3/4}$. Весьма слабо зависят от v_{τ}/v_T также инкремент и характерное волновое число. Зависимость критического значения ρ_i/a от v_{τ}/v_T показана схематически на рис. 5.4.

Результаты (5.50) получены в предположении, что $\omega/kv_T < 1$. Это оправдывается, если

$$v_T/v_T > \rho_i/a. \quad (5.51)$$

На пределе применимости (5.50) (при $v_T/v_T \approx \rho_i/a$) условие неустойчивости означает

$$\frac{\rho_i}{a} > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}\right)^{1/2}. \quad (5.52)$$

По порядку величины этот критерий совпадает с условием неустойчивости максвелловской плазмы (5.9). При $v_T/v_T < \rho_i/a$ неравновесность поперечного распределения становится несущественной.

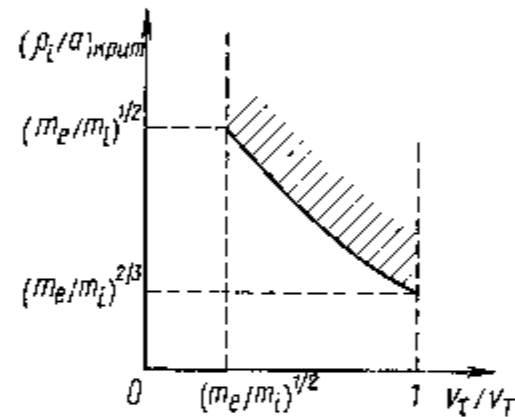


Рис. 5.4. Зависимость критического значения ρ_i/a от степени неравновесности поперечного распределения ионов при $\omega_{pe} > \omega_{Be}$. Заштрихована область неустойчивости

3. **Возмущения с $\omega \approx \omega_{Bi}$.** Используя выражения (4.24) для $\epsilon_0^{(e)}$ и (4.99) для $\epsilon_0^{(i)}$, получаем следующее дисперсионное уравнение, учитывающее эффекты циклотронного вращения ионов:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{pe}^2}{k^2 \omega \omega_{Be}} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^\infty d\xi_\perp \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{\omega J_n^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \frac{df_\perp}{d\xi_\perp} = 0. \quad (5.53)$$

Примем $\xi \gg 1$ и сделаем приближенную замену $J_n^2(\xi) = (\pi \xi)^{-1}$. Тогда (5.53) сводится к более простому уравнению:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{pe}^2}{k^2 \omega \omega_{Be}} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} \frac{1}{\pi (k\rho_i)^2} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (5.54)$$

Распределение ионов по поперечным энергиям предположено δ -функциональным.

Из (5.54) находим, что при условиях (5.43) и (5.45) имеет место нарастание возмущений с

$$\gamma \approx \text{Re } \omega \approx \omega_{Bi}. \quad (5.55)$$

§ 5.4. Плазма с продольным током

В плазме с продольным током могут развиваться неустойчивости пучкового типа, для которых градиентные эффекты не важны. Здесь мы, однако, будем интересоваться такими ситуациями, когда эти неустойчивости не развиваются.

1. **Холодная плазма ($V > v_{Te}$) малого поперечного размера $a < V/\omega_{pe}$ в сильном магнитном поле ($\omega_{pe} \ll \ll \omega_{Be}$).** В § 4.2 отмечалось, что в системе пучок — плазма пучковая неустойчивость не развивается, если поперечный размер плазмы конечен, а ее плотность слишком мала — критерий (4.28). Такая же ситуация имеет место и в случае, когда электроны плазмы движутся относительно ионов: в пространственно-неограниченной плазме должна была бы развиваться неустойчивость Бунемана, тогда как ограниченная плазма при условии (4.28) устойчива (см. § 10.2 т. 1). Чтобы составить истинную картину неустойчивостей, нужно учесть градиентные эффекты, аналогично тому как это было сделано в § 4.2. При этом получаем дисперсионное уравнение [ср. с (4.33)]:

$$1 - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 + \frac{\kappa n k_y \omega_{pe}^2}{k^2 \omega_{Be} (\omega - k_z V)} = 0. \quad (5.56)$$

Вытекающее отсюда условие неустойчивости сводится к (4.35). Вследствие этого остается в силе анализ границ неустойчивости, проведенный в § 4.2.

Если (4.35) — несильное неравенство, то инкремент возмущений порядка

$$\gamma \approx \omega_{pi}. \quad (5.57)$$

Учитывая (5.35), замечаем, что этот результат удовлетворяет условию $\gamma < k_z V$ при $\omega_{pi} > \omega_{Bi}$, т.е. тогда же, когда не нужно рассматривать влияние магнитного поля на движение ионов, приближение $|\omega| \gg \omega_{Bi}$.

2. Плазма с током при $\partial f_0^{(e)}/\partial v_z \leq 0$. Пусть средняя скорость электронной компоненты отлична от нуля ($V \neq 0$), но функция $f_0^{(e)}$ не имеет максимума при $v_z \neq 0$ ($\partial f_0^{(e)}/\partial \ln v_z \leq 0$), так что неустойчивости пучкового типа не развиваются. Распределение указанного типа может возникнуть, например, в результате развития высокочастотной ионно-звуковой неустойчивости при $V \approx v_{Te}$ и $\omega_{pe} < \omega_{Be}$ и последующего процесса квазилинейной релаксации.

Исследуем градиентные неустойчивости такой плазмы. Для определенности рассмотрим электронное распределение вида ступеньки:

$$f_0^{(e)}(v_z) = \begin{cases} n_0/2u, & V-u < v_z < V+u; \quad u > V, \\ 0, & v_z < V-u, \quad v_z > V+u. \end{cases} \quad (5.58)$$

Полагая $\omega/k_z \ll (u, V)$, приходим к дисперсионному уравнению

$$1 - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2(u^2 - V^2)} + \frac{\kappa_n k_y}{k^2} \times \\ \times \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{Be} |k_z| u} \left(\ln \left| \frac{u+V}{u-V} \right| + i\pi \right) = 0. \quad (5.59)$$

Отсюда получаем следующее.

а. Кинетическая раскачка высокочастотных ионно-звуковых колебаний при u и V . При $u \gg V$ логарифмом в (5.50) можно пренебречь, и тогда решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &= (m_e/m_i)^{1/2} k u [1 + (ku/\omega_{pe})^2]^{-1/2}; \\ \gamma &= (\pi/4) \kappa_n k_y (\operatorname{Re} \omega)^3 / k^2 |k_z| \omega_{Be} u. \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

Эта неустойчивость аналогична рассмотренной в п. 2а § 5.2. Для ее развития, однако, не требуется выполнения порогового условия типа (5.26). Последнее получается из неравенства $|\partial f_0/\partial v_z| < (k_y/k_z \omega_B) \partial f_0/\partial x$, а это неравенство при $f_0^{(e)}$ вида (5.58) удовлетворяется автоматически.

Степень неоднородности влияет, однако, на инкремент колебаний. Введя параметр $\rho_0 \equiv (m_e/m_i)^{1/2} u/\omega_{Bi}$, эквивалентный эффективному ларморовскому радиусу иона (см. § 5.2), из (5.60) находим, что при $\rho_0/a < 1$

$$\gamma_{\max} \approx (\rho_0/a) \omega_{pi}. \quad (5.61)$$

При $\rho_0/a \ll 1$ этот инкремент существенно меньше, чем (5.25).

б. Гидродинамическая неустойчивость при $u \approx V$. При сравнимых u и V в (5.59) нужно удерживать также слагаемое с логарифмом. Полагая $V \geq a \omega_{Bi} (m_i/m_e)^{1/2}$, т.е. $\rho_0/a \geq 1$, находим, что возмущения с $k_z/k_y < \kappa_n V/\omega_{Be}$ раскачиваются с инкрементом

$$\gamma \approx \operatorname{Re} \omega \approx (m_e/m_i)^{1/2} k_{\perp} V \leq \omega_{pi}. \quad (5.62)$$

Эта неустойчивость аналогична рассмотренной в п. 2б § 5.2. В этой области параметров наличие направленного движения электронов не играет существенной роли.

§ 5.5. Плазма с поперечным током

В пренебрежении градиентными эффектами неустойчивости плазмы с поперечным током обсуждались в гл. 11 т. 1. При $\nabla n_0 \neq 0$ в дисперсионное уравнение для токовых неустойчивостей должно быть добавлено слагаемое, связанное конвекции электронов. В случае холодных ионов и электронов при этом получается

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}\right)^2 + \frac{\kappa_n k_y \omega_{pe}^2}{k^2 \omega_{Be}} - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \cos \theta\right)^2 - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_y V)^2} = 0. \quad (5.63)$$

Видно, что конвекция важна, если

$$\cos \theta \leq (\kappa_n V/\omega_{Be})^{1/2}. \quad (5.64)$$

В качестве характерного $\cos \theta$ сюда следует подставлять $\cos \theta \approx (m_e/m_i)^{1/2}$. Тогда получаем условие сущности конвекции:

$$V \geq \omega_{Bi} a. \quad (5.65)$$

Обратное неравенство дает предел применимости приближения однородной плазмы.

Пусть неравенство (5.65) сильное. Тогда в (5.63) можно пренебречь вкладом продольного движения электронов, $\cos^2 \theta \rightarrow 0$. При этом из (5.63) следует

$$\gamma_{\max} \approx (\kappa_n V / \omega_{Bi})^{1/6} \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2)^{-1/2}. \quad (5.66)$$

Это максимальное значение инкремента достигается при k и $\text{Re } \omega$, связанных соотношением

$$\text{Re } \omega \approx k_y V \approx (\kappa_n V / \omega_{Bi})^{1/2} \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2)^{-1/2}. \quad (5.67)$$

Инкремент (5.66) несколько больше, чем в случае $\nabla n_0 = 0$ и $\cos \theta \approx (m_e / m_i)^{1/2}$, — на множитель порядка $(\kappa_n V / \omega_{Bi})^{1/6}$.

Неустойчивость с $\cos \theta = 0$ возможна не при любом знаке κ_n ; для этого необходимо, чтобы

$$\kappa_n V / \omega_{Be} < 0. \quad (5.68)$$

В случае азимутально вращающихся ионов $V = -r \omega_{Bi}$. Поэтому из (5.68) следует, что неустойчивой является плазма, плотность которой спадает с радиусом:

$$\partial \ln n_0 / \partial r < 0. \quad (5.69)$$

Конвекция электронов влияет также на устойчивость плазмы с конечной температурой электронов и ионов и, в частности, при $T > m_i V^2$. При условии (5.65) это неравенство в случае горячих электронов означает

$$\rho_0 / a > (m_e / m_i)^{1/2}. \quad (5.70)$$

При этом можно по-прежнему считать $\rho_e / a \ll 1$ и использовать выражения для $v_0^{(e)}$, полученные в § 4.7.

В случае горячих ионов неравенство $T_i \geq m_i V^2$ при условии (5.65) означает

$$\rho_i \geq a. \quad (5.71)$$

Это соответствует плазме с ларморовским радиусом ионов порядка размера неоднородности. Найти решение кинетического уравнения для такой плазмы удается далеко не всегда. Для некоторых частных случаев распределений частиц по радиусу это решение было найдено Шимой и Фаулером и Юнгвиртом.

Библиографический обзор к гл. 5

1. Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. О циклотронной неустойчивости неоднородной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 919.
Указано на возможность раскачки поперечно-циклотронных колебаний с неоднородной плотностью, § 5.1, 5.2.
2. Тимофеев А. В. О неустойчивости газового разряда в магнитном поле без продольного тока. — «Докл. АН СССР», 1963, т. 152, с. 84.
Рассмотрена раскачка высокочастотных поперечно-звуковых колебаний в неоднородной плазме с горячими электронами, § 5.2.
3. Михайловский А. Б. Дрейфово-циклотронная неустойчивость плазмы с горячими ионами. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 125.
Исследовались поперечно-циклотронная и высокочастотная неустойчивости плазмы с $T_i > T_e$, § 5.1, и указано на возможность раскачки высокочастотных возмущений в плазме с немаксвелловскими ионами (градиентно-конусная неустойчивость), § 5.3.
4. Shima Y., Fowler T. K. Flute instabilities at ion gyrofrequency. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2245.
Рассмотрены неустойчивости плазмы с горячими ионами, § 5.1, 5.3, и влияние конвекции электронов на неустойчивость азимутального потока ионов, § 5.5.
5. Post R. F., Rosenbluth M. N. Electrostatic instabilities in finite mirror — confined plasmas. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 730.
Найдена граница градиентно-конусной неустойчивости, § 5.3, рассмотрен вопрос о роли этой неустойчивости в проблеме удержания плазмы в адиабатических ловушках.
6. Арсенин В. В. О пучковой неустойчивости разреженной неоднородной плазмы. — «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, с. 766.
7. Михайловский А. Б. К теории устойчивости пространственно-неоднородного тока в плазме. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1945.
8. Владимиров В. В. Бесстолкловительная токовая конвекция и ее динамическая стабилизация. — «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, с. 785.
9. Ловецкий Е. Е., Рухадзе А. А. Теория гидродинамической устойчивости неоднородных плазменных токов. — «Ядерный синтез», 1966, т. 6, с. 9.
В работах [6—9] исследовались высокочастотные градиентные неустойчивости плазмы с продольным током, § 5.4.
10. Михайловский А. Б., Цылин В. С. Высокочастотная неустойчивость плазмы, находящейся в радиальном электрическом и продольном магнитных полях. — «Письма ЖЭТФ», 1966, т. 3, с. 247.
Рассмотрена высокочастотная градиентная неустойчивость в плазме с поперечным током, § 5.5.
11. Михайловский А. Б. Нелинейная теория дрейфово-конусной неустойчивости. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 169, с. 554.
12. Галеев А. А. Дрейфово-анизотропная неустойчивость плазмы и аномальные процессы переноса. — «Журн. прикл. мех. и техн. физ.», 1966, т. 2, с. 7.

В работах [11, 12] обсуждается градиентно-конусная неустойчивость, § 5.3.

13. Jungwirth K. Instabilities of plasma with intense azimuthal streams. — «Plasma Phys.», 1968, v. 10, p. 595. Исследуются неустойчивости плазмы с азимутальным потоком ионов, § 5.5.
14. Байков И. С., Рухадзе А. А. Возбуждение колебаний во встречных потоках неоднородной плазмы. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1913.

Рассматривается возбуждение высокочастотных колебаний во встречных потоках.

Глава 6

СЛАБОНЕОДНОРОДНАЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ПЛАЗМА

§ 6.1. Плазма с неоднородной плотностью

В этой главе исследуем низкочастотные неустойчивости, $\omega \ll \omega_{Vi}$. Согласно замечаниям, сделанным в § 5.1, такие неустойчивости — единственно возможные, если плазма слабонеоднородна, $\rho_i/a \ll (m_e/m_i)^{1/2}$.

Низкочастотные возмущения могут раскачиваться также в плазме с конечным ρ_i/a , т.е. в условиях, когда возможна раскачка ионно-циклотронных и высокочастотных возмущений. Несмотря на малость инкремента, низкочастотные неустойчивости могут приводить к более существенным турбулентным потерям плазмы, чем неустойчивости с $\gamma \gg \omega_{Vi}$, так как скорость этих потерь зависит не только от инкремента, но и от длины волны, а низкочастотные неустойчивости, вообще говоря, относятся к более длинноволновым. Из этого следует, что низкочастотные неустойчивости, обсуждаемые ниже, нужно учитывать при анализе поведения плазмы не только с малым, но и с конечным ρ_i/a .

Как и в гл. 4 и 5, будем следовать бесстолкновительному приближению, отложив изучение роли парных столкновений до гл. 7. Столкновения не важны, если плотность не слишком велика, а температура не слишком мала (оценки даются в гл. 7).

Магнитное поле предполагаем однородным. Это означает пренебрежение наряду с эффектами конечного

β также кривизной и широм поля. (Модельный учет кривизны силовых линий производится в гл. 9. Понятие шира и рассмотрение связанных с ним эффектов даются в гл. 12.)

В этом параграфе мы рассмотрим неустойчивости плазмы с неоднородной плотностью, $\nabla n_0 \neq 0, \nabla T = 0$, полагая $\beta \ll m_e/m_i$, $\Pi_e \equiv (\omega_{pe}a/c)^2 \ll 1$. При этих предположениях задача сводится к исследованию вытекающего из (1.108) дисперсионного уравнения

$$\epsilon_0 = 1 + \sum_{\alpha=i,e} \left(1 - \frac{\omega_{n\alpha}}{\omega}\right) \frac{1}{(kd_\alpha)^2} \left[1 + i\sqrt{\pi} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega}{|k_z|v_{T\alpha}} W\left(\frac{\omega}{|k_z|v_{T\alpha}}\right) I_0(z_\alpha) e^{-z_\alpha}\right] = 0. \quad (6.1)$$

Здесь

$$\omega_{n\alpha} = k_y \kappa_n T_\alpha / m_\alpha \omega_{Bi}$$

$$\kappa_n = \partial \ln n_0 / \partial x.$$

1. **Гидродинамическая неустойчивость.** Начнем с рассмотрения возмущений с $\omega \gg (k_z v_{Te}, k_z v_{Ti})$ ($z_e, z_i \ll 1$). Отношение ω_{pi}/ω_{Vi} считаем большим. При этих предположениях из (6.1) следует

$$\left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{Vi}}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}\right) \cos^2 \theta = 0. \quad (6.2)$$

Ветви колебаний, описываемые этим уравнением, представлены схематически на рис. 6.1. При $T_e = T_i$ два из трех корней комплексны, если

$$\cos \theta < (\cos \theta)_{\text{гран}} \equiv 2,3 (m_e/m_i)^{1/2} \kappa_n k_y \rho_i^2. \quad (6.3)$$

Максимальный инкремент возмущений порядка

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{ne}. \quad (6.4)$$

2. **Кинетическая неустойчивость при $z_i \ll 1$.** Уравнение (6.1) имеет решения с $\gamma > 0$ и при $\omega \ll k_z v_{Te}$. В этом

случае неустойчивость обязана взаимодействию с колебаниями резонансных электронов.

а. Плазма с $T_e \gg T_i$. Рассмотрим эту неустойчивость сначала в простейшем случае холодных ионов $T_e \gg T_i$. Положив в (6.1) $T_i \rightarrow 0$, $\omega \ll k_z v_{Te}$, приходим к дисперсионному уравнению

$$1 + \frac{k_{\perp}^2 T_e}{m_i \omega_{Bi}^2} - \frac{\omega_{ne}}{\omega} - \frac{k_z^2 T_e}{m_i \omega^2} + i V \pi \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}\right) = 0. \quad (6.5)$$

Родословная каждого из членов левой части этого уравнения такова. Единица обязана бoльцмановскому отклику электронов ($n_e' = -e n_0 \Psi / T_e$); член $k_{\perp}^2 T_e / m_i \omega_{Bi}^2$ —

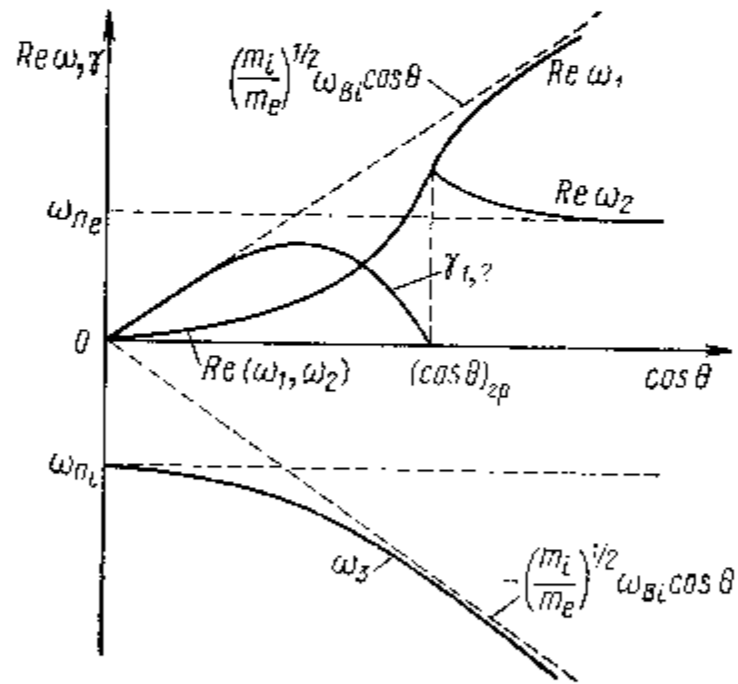


Рис. 6.1. Ветви низкочастотных колебаний плазмы с неоднородной плотностью при $|\omega| \gg k_z v_{Te}$, $z_i \ll 1$ (приближения $\beta \ll m_e/m_i$, $k \ll \omega_{ep}/c$)

поперечной инерции ионов; ω_{ne}/ω — конвективному дрейфу ионов; $k_z^2 T_e / m_i \omega^2$ — инерционному движению ионов вдоль магнитного поля; мнимослагаемое учитывает

резонансное взаимодействие электронов с колебаниями, оно содержит два члена, соответствующих скоростной и пространственной производным электронной функции распределения (см. § 4.4).

В пренебрежении членом с k_z^2 , а также малыми мнимыми членами из (6.5) следует

$$\text{Re } \omega = \frac{\omega_{ne}}{1 + k_{\perp}^2 T_e / m_i \omega_{Bi}^2}. \quad (6.6)$$

Видно, что частота этой ветви колебаний удовлетворяет условию

$$0 < \omega / \omega_{ne} < 1. \quad (6.7)$$

Резонансные электроны, взаимодействуя с такой волной, должны передавать ей свою энергию, т.е. приводить к раскачке колебаний. Инкремент нарастания колебаний равен

$$\gamma = V \pi \frac{(\text{Re } \omega)^2}{|k_z| v_{Te}} \frac{k_{\perp}^2 T_e}{m_i \omega_{Bi}^2} \frac{1}{1 + k_{\perp}^2 T_e / m_i \omega_{Bi}^2}. \quad (6.8)$$

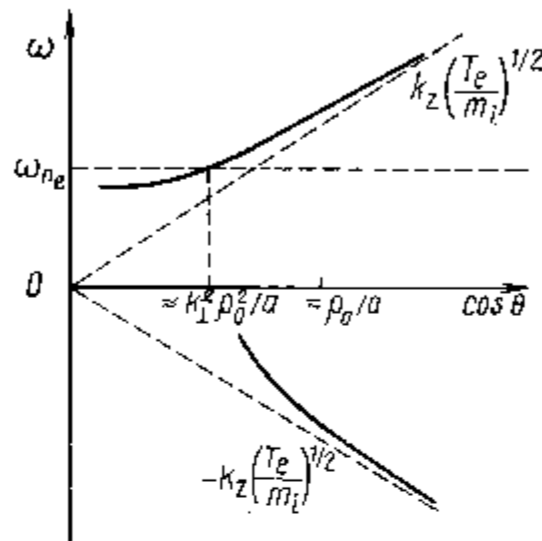
Раскачка обусловлена конвекцией резонансных электронов (ср. с § 4.4). Отметим, что хотя в формулу (6.6) входит величина ω_{ne} , выражающаяся через среднюю скорость ларморовских токов $V_{\perp 0e}$, сами ларморовские токи в данном случае не играют никакой роли.

Раскачиваемая ветвь колебаний отсутствует в приближении однородной плазмы $\text{Re } \omega \rightarrow 0$ при $\nabla n_0 \rightarrow 0$. Она обязана конвекции ионов. Учитывая в (6.5) член $\sim k_z^2$, можно найти соответствие между этой ветвью и ветвями колебаний однородной плазмы. В этом случае решения (6.5) для $\text{Re } \omega$ имеют вид

$$\text{Re } \omega = \frac{1}{2} (1 + k_{\perp}^2 \rho_0^2)^{-1} \left[\omega_{ne} \pm \sqrt{\omega_{ne}^2 + 4k_z^2 T_e (1 + k_{\perp}^2 \rho_0^2) / m_i} \right]; \quad \rho_0^2 = T_e / m_i \omega_{Bi}^2. \quad (6.9)$$

Эти решения представлены на рис. 6.2. Видно, что с ростом k_z ветвь (6.6) переходит в низкочастотную

ионно-звуковую, описываемую уравнением (6.31) т. 1. Интервал значений $\cos \theta$, для которых решения (6.9) существенно отличаются от ионно-звуковых, при $k_{\perp} \rho_0 < 1$ ограничен сверху условием (см. рис. 6.2)



$$\cos \theta < \rho_0 / a. \quad (6.10)$$

Однако неустойчивость возможна лишь при гораздо меньших $\cos \theta$:

$$\cos \theta < k_{\perp} \rho_0^2 / a. \quad (6.11)$$

Что касается второго корня (6.9) — с $|\omega| \omega_{ne} < 0$, то он соответствует затухающим колебаниям как при больших, так и при малых $\cos \theta$. Это связано с тем, что знак $\omega \text{Im} \epsilon_0$ для возмущений с $\omega / \omega_{ne} < 0$ положителен.

Рис. 6.2. Ветви колебаний не-

однородной плазмы с $T_e \gg T_i$ при $\omega < k_z v_{Te}$

6. Плазма с $T_e = T_i$. Для возмущений с $v_{Ti} \ll \omega / k_z \ll v_{Te}$, $z_i \ll 1$ при $T_e = T_i$ вместо (6.5) из (6.1) следует

$$1 + z_i \left(1 + \frac{\omega_{ne}}{\omega} \right) - \frac{\omega_{ne}}{\omega} - \frac{k_z^2 T}{m_i \omega^2} \times \left(1 + \frac{\omega_{ne}}{\omega} \right) + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} \right) = 0. \quad (6.12)$$

Если неравенство (6.11) сильное, то

$$\text{Re } \omega = \omega_{ne} (1 - 2z_i); \quad \gamma = \frac{2 \sqrt{\pi} (\omega_{ne})^2}{|k_z| v_{Te}} z_i. \quad (6.13)$$

Со стороны больших k_z область неустойчивости ограничена условием, аналогичным (6.11):

$$\cos \theta < \kappa \rho_i z_i^{1/2}. \quad (6.14)$$

Кинетический инкремент (6.13) с уменьшением k_z достигает максимума порядка

$$\gamma_{\text{макс.кин}} \approx z_i \omega_{ne} \quad (6.15)$$

при

$$k_{z \text{ опт}} \approx \omega_{ne} / v_{Te}. \quad (6.16)$$

При дальнейшем уменьшении k_z кинетический инкремент становится экспоненциально малым ($\sim \exp[-(\omega_{ne} / k_z v_{Te}^2)]$). Если k_z столь мало, что удовлетворяется условие (6.3), то развивается гидродина-

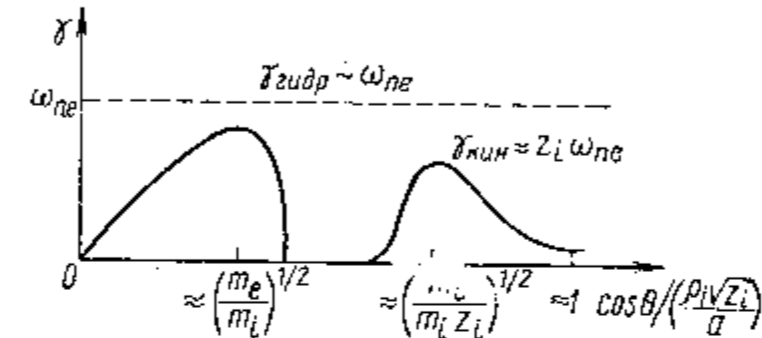


Рис. 6.3. Соответствие между гидродинамической и кинетической неустойчивостью при $z_i < 1$

мическая неустойчивость, рассмотренная в п. 1. Соответствие между кинетической и гидродинамической неустойчивостями показано на рис. 6.3.

3. Коротковолновые возмущения. С увеличением z_i до значений порядка единицы щель между гидродинамической и кинетической неустойчивостями на рис. 6.3 закрывается. При $z_i \approx 1$ из (6.4) и (6.13) по порядку величины следует

$$\gamma \approx \kappa v_{Ti}. \quad (6.17)$$

Численный расчет инкремента для некоторых значений z_i был проведен Б. Б. Кадомцевым и А. В. Тимофеевым (рис. 6.4).

При $z_i \gg 1$ остается только кинетическая неустойчивость. Дисперсионное уравнение (6.1) в этом случае принимает вид

$$2 - \frac{\omega_{ne}}{\omega \sqrt{2\pi} z_i} - i \sqrt{\pi} \frac{\omega_{ne}}{|k_z| v_{Te}} = 0. \quad (6.18)$$

Здесь предположено также $v_{Ti} \ll \omega / k_z \ll v_{Te}$, $\omega_{ne} \gg \omega$. Максимум инкремента достигается при

$$k_{z \text{ опт}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \omega_{ne} / v_{Te}. \quad (6.19)$$

При этом

$$\gamma_{\text{макс}} = \text{Re} \omega = \kappa v_{Ti} / 8 \sqrt{\pi}. \quad (6.20)$$

Видно, что в пределе больших z_i максимальный инкремент не зависит от волнового числа. Зависимость $\gamma(k_z)$ для $z_i = 10$ представлена на рис. 6.4.

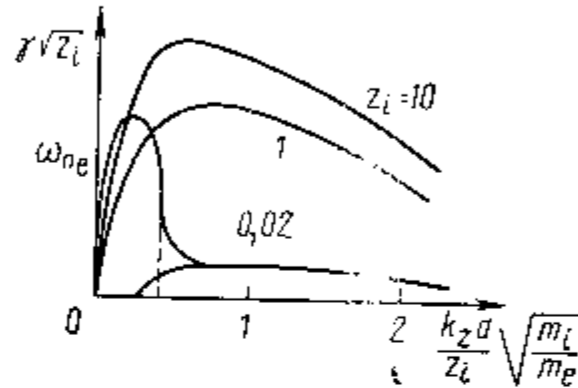


Рис. 6.4. Зависимость инкремента γ от продольного волнового числа k_z для неустойчивости плазмы с неоднородной плотностью

4. Граница неустойчивости плазмы относительно возмущений с $z_i \geq 1$. При конечных z_i и $\omega/k_z v_{Ti}$ дисперсионное уравнение (6.1) имеет вид

$$2 + \frac{i\sqrt{\pi}(\omega - \omega_{pe})}{|k_z|v_{Te}} + i\sqrt{\pi} \frac{\omega + \omega_{pe}}{|k_z|v_{Ti}} I_0(z_i) \times \exp(-z_i) W\left(\frac{\omega}{k_z v_{Ti}}\right) = 0. \quad (6.21)$$

Полагая здесь частоту вещественной, находим границу неустойчивости. Области неустойчивости и устойчивости представлены на рис. 6.5. Из рисунка видно, что плазма

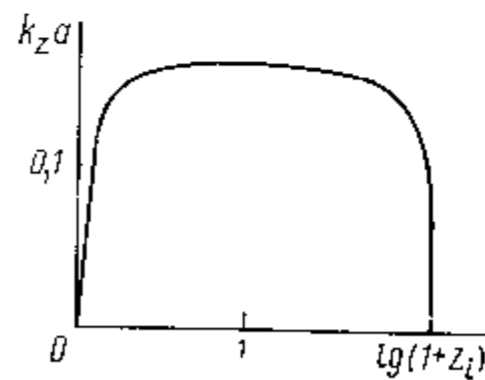


Рис. 6.5. Граница области неустойчивости на плоскости (k_z, z_i) . Здесь $a = 1/\kappa$

ма может быть неустойчивой, если только ее продольный размер L достаточно велик по сравнению с поперечным a , $L > 20 a$ (полагается $L \approx \pi/k_z$, $a \approx 1/\kappa$).

§ 6.2. Плазма с неоднородной температурой

Неустойчивости, рассмотренные в § 6.1, могут развиваться не только в плазме с $\eta \equiv \partial \ln T / \partial \ln n_0 = 0$, но и при $\eta \neq 0$. Наряду с этим для плазмы с $\eta \neq 0$ характерны некоторые новые типы неустойчивостей. К их исследованию мы теперь переходим.

1. Раскачка возмущений с $\omega \approx k_z v_{Ti}$. а. Длинноволновые возмущения, $z_i \ll 1$. Полагаем в выражениях (4.103) для $\epsilon_0^{(i)}$, $\epsilon_0^{(e)}$ $z_i \ll 1$, $\omega \ll k_z v_{Te}$, членами порядка $\omega/k_z v_{Te}$ и z_i пренебрегаем. Тогда дисперсионное уравнение $\epsilon_0^{(i)} + \epsilon_0^{(e)} = 0$ принимает вид

$$1 + \frac{T_i}{T_e} - \frac{\omega \omega_{Ti}}{k_z^2 v_{Ti}^2} + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z|v_{Ti}} W\left(\frac{\omega}{|k_z|v_{Ti}}\right) \times \left[1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) - \frac{\omega_{Ti} \omega}{k_z^2 v_{Ti}^2} \right] = 0, \quad (6.22)$$

где $\omega_{Ti} = (k_y c / e_i B_0) \partial T_i / \partial x$.

При $|\eta| \gg 1$, $k_z v_{Te} \ll \omega \ll \omega_{Ti}$ отсюда следует

$$\omega^3 + \frac{k_z^2 T}{m_i} \omega_{Ti} = 0; \quad T_e = T_i \equiv T. \quad (6.23)$$

Одно из трех решений этого уравнения имеет положительную мнимую часть $\gamma > 0$, равную

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{k_z^2 T}{m_i} \omega_{Ti} \right|^{1/3}. \quad (6.24)$$

На пределах применимости этого результата (при $k_z v_{Ti} \approx \omega_{Ti}$) по порядку величины имеем

$$\gamma \approx \omega_{Ti} \approx k_z v_{Ti}. \quad (6.25)$$

Видно, что в плазме с неоднородной температурой могут раскачиваться возмущения, продольная фазовая скорость которых порядка скорости ионно-звуковых $|\omega|/k_z \approx v_{Ti}$. Характерное значение $\cos \theta$ для таких возмущений порядка

$$\cos \theta \approx \rho_i / a. \quad (6.26)$$

Раскачка столь коротковолновых вдоль \mathbf{V}_0 возмущений в плазме с $\eta=0$ отсутствует.

Обсуждаемую неустойчивость можно рассматривать как результат раскачки ионно-звуковых ветвей колебаний (§ 6.3 т. 1) конвективным движением ионов (ср. с § 4.5). Уравнение (6.23) — предельный случай следующего уравнения:

$$1 - \frac{k_z^2 T_e}{m_i \omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{Ti}}{\omega} \right) = 0. \quad (6.27)$$

При относительно больших k_z частоты ионно-звуковых колебаний и конвективной ветви $\omega = \omega_{Ti}$ существенно различны и все три корня вещественны. При малых k_z происходит «пересечение» ветвей колебаний, и корни становятся комплексными.

Чтобы найти границу неустойчивости со стороны больших k_z , полагаем в (6.22) ω вещественным и приравняем нулю вещественную и мнимую части уравнений. В результате находим

$$\left. \begin{aligned} |k_{z \text{ гран}}| &= \frac{1}{2} \frac{|\omega_{Ti}|}{v_{Ti}} \left(1 - \frac{2}{\eta} \right)^{1/2}; \\ \omega &= \frac{\omega_{Ti}}{2} \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) - v_{Ti} k_{z \text{ гран}} \left(1 - \frac{2}{\eta} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Эти условия могут удовлетворяться, если

$$\eta < 0 \quad \text{либо} \quad \eta > 2. \quad (6.29)$$

Соотношения (6.29) играют роль необходимых условий неустойчивости.

Результаты настоящего подпункта справедливы вплоть до $z_i \approx 1$. На границе применимости приближения малых z_i

$$\gamma \approx v_{Ti}/a; \quad k_z \approx 1/a. \quad (6.30)$$

б. Коротковолновые возмущения $z_i \geq 1$. При произвольных z_i вместо (6.22) из (4.103) следует

$$1 + \frac{T_i}{T_e} - \frac{\omega \omega_{Ti}}{(k_z v_{Ti})^2} I_0 \exp(-z_i) + i \sqrt{\pi} \frac{\omega I_0 \exp(-z_i)}{|k_z| v_{Ti}} \times$$

$$\times W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{Ti}} \right) \left[1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} + \frac{\omega_{Ti}}{\omega} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + 2z_i \frac{I_0 - I_1}{I_0} \right) - \frac{\omega_{Ti} \omega}{(k_z v_{Ti})^2} \right] = 0. \quad (6.31)$$

Аналогично (6.29) находим необходимое условие неустойчивости:

$$\left. \begin{aligned} \eta < 0 \\ \text{либо} \\ \eta > 2 \left(1 + 2z_i \frac{I_0 - I_1}{I_0} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Эти соотношения изображены на рис. 6.6. Из (6.32) и из рисунка видно, что что $z_i \geq 1$ неустойчивость может

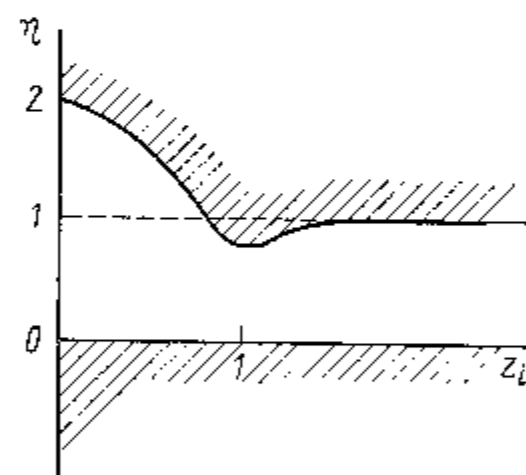


Рис. 6.6. Область неустойчивости с $\gamma \approx k_z v_{Ti}$ (заштрихована)

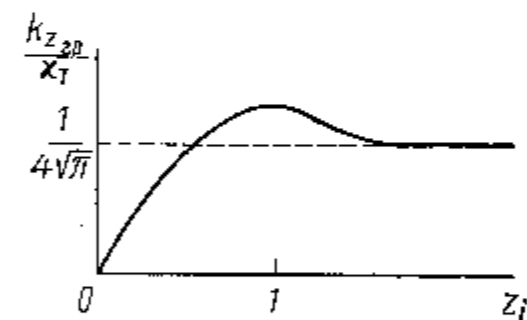


Рис. 6.7. Зависимость $k_{z \text{ гр}}$ от z_i при $|\eta| \ll 1$. Неустойчивости соответствует область под кривой

развиваться в плазме с $\eta \geq 1$. Вытекающая из (6.31) граница неустойчивости, $k_{z \text{ гран}} = k_{z \text{ гран}}(z_i)$, при $|\eta| \gg 1$ изображена на рис. 6.7.

Инкремент возмущений с $z_i \gg 1$ можно оценить, полагая $\gamma \approx k_z v_{Ti}$, где k_z несколько меньше, чем $k_{z \text{ гран}}$. Тогда

$$\gamma \lesssim v_{Ti}/4 \sqrt{\pi} a. \quad (6.33)$$

Укажем пределы применимости уравнения (6.31). Оно теряет силу, если $k \geq \min(d_i^{-1}, \rho_e^{-1})$. Это означает, что в

случае плазмы с $\omega_{pe} > \omega_{Be}$ им можно пользоваться, если $z_i < m_i/m_e$, а в случае более разреженной плазмы ($\omega_{pe} < \omega_{Be}$) — только при $z_i \leq (\omega_{pe}/\omega_{Be})^2 m_i/m_e$.

2. Возмущения с $z_i > 1$, $\omega \gg k_z v_{Te}$. Полагая в (4.103) $z_i \gg 1$, $z_e \ll 1$, $(kd_e)^2 \ll 1$ и пренебрегая членами порядка $z^{-1/2}$, получаем уравнение, отличающееся от (6.22) только заменой ионных индексов электронными:

$$2 - \frac{\omega_{Te} \omega}{k_z^2 v_{Te}^2} + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} W \left(\frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) - \frac{\omega_{Te} \omega}{(k_z v_{Te})^2} \right] = 0. \quad (6.34)$$

Поэтому при анализе (6.34) можно воспользоваться результатами предыдущего пункта. В частности, находим, что в плазме с $|\eta| \gg 1$ при $k_z v_{Te} < v_{Te}$ развивается гидродинамическая неустойчивость с инкрементом [ср. с (6.34)]:

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{k_z^2 T}{m_e} \omega_{Te} \right|^{1/3}. \quad (6.35)$$

Инкремент достигает максимума при

$$k_{z \text{ опт}} \approx \omega_{Te}/v_{Te} \approx \kappa_T k_{\perp \rho_e}, \quad (6.36)$$

по порядку величины равного

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{Te}. \quad (6.37)$$

Формулу (6.35) можно рассматривать как следствие уравнения

$$1 - (k_z^2 T_i/m_e \omega^2) (1 - \omega_{Te}/\omega) = 0. \quad (6.38)$$

Поэтому обсуждаемую неустойчивость можно интерпретировать как результат взаимодействия электронно-звуковых колебаний (п. 2 § 6.4 т. 1) с конвективной вставкой электронов $\omega = \omega_{Te}$ (ср. с аналогичными соображениями предыдущего пункта).

Для плазмы с $\omega_{pe} > \omega_{Be}$ уравнение (6.34) справедливо вплоть до $z_e \approx 1$. На пределах его применимости при $z_e \approx 1$ из (6.35) и (6.36) получаем оценки, аналогичные (6.30):

$$\gamma \approx \kappa_T v_{Te}; \quad k_{z \text{ опт}} \approx \kappa_T. \quad (6.39)$$

Численно инкремент (6.39) больше, чем (6.30), в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз. Продольные волновые числа в обоих случаях одинаковые, а поперечные отличаются в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз. В случае плазмы, неустойчивой относительно рассматриваемых возмущений, параметр η должен удовлетворять условиям (6.29).

В случае плазмы с $\omega_{pe} < \omega_{Be}$ пределы применимости (6.34) ограничены условием $kd_e \leq 1$. При $kd_e \approx 1$ вместо (6.39) имеем

$$\gamma \approx (\omega_{pe}/\omega_{Be}) v_{Te}/a; \\ k_{z \text{ опт}} \approx \kappa_T \omega_{pe}/\omega_{Be}. \quad (6.40)$$

3. Зависимость $\max k_{z \text{ гран}}(z_i)$ от η . Вычисляя $k_{z \text{ гран}}(z_i)$ для различных значений параметра η , можно найти максимальное значение этой функции z_i и построить график $\max k_{z \text{ гран}}(\eta)$. Он имеет вид, указанный на рис. 6.8. Параметр $k_{z \text{ гран}}$ на этом рисунке относится к «эффективному» поперечному размеру неоднородности плазмы. Из рисунка видно, что раскачка колебаний возможна только в случае, если продольный размер плазмы по крайней мере на порядок превышает поперечный.

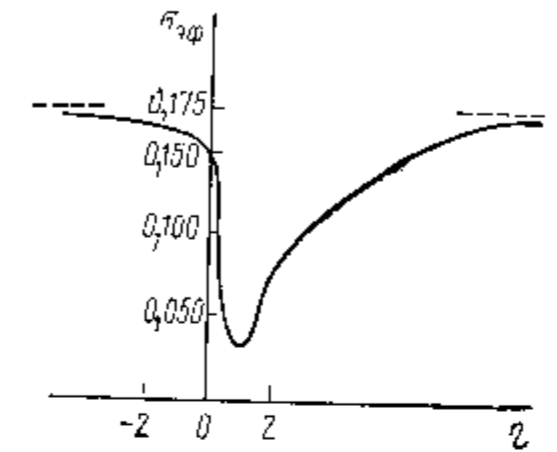


Рис. 6.8. Максимальное волновое число k_z , ограничивающее область неустойчивости плазмы, как функция параметра $\eta \equiv \partial \ln T / \partial \ln n_0$. Здесь $\sigma_{\phi} = \max |k_{z \text{ гр}}| / (|\kappa_T| + |\kappa_n|)$

§ 6.3. Плазма с продольным током

Пусть электроны движутся относительно ионов со скоростью $\mathbf{V}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ (продольный ток). При достаточно большом V_0 , $V_0 > V_{кр}$ в плазме могут развиваться неустойчивости, обсуждавшиеся в § 10.1, т. 1. Если $V_0 < V_{кр}$, то единственно возможными являются градиентные неустойчивости. Те из них, для которых V_0 не важно, обсуждались в § 6.1, 6.2. Теперь рассмотрим градиентные неустойчивости, для которых конечность V_0 существенна. Возмущения будем считать потенциальными. При $k_{\perp} \approx a^{-1}$ это законно, если $a < c/\omega_{pe}$.

1. **Возмущения с $\omega > k_z v_{Te}$, $z_i \ll 1$.** Гидродинамическая токово-конвективная неустойчивость. Исходим из дисперсионного уравнения

$$\left(\frac{\omega_{Pi}}{\omega_{Bi}}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{Pe} \cos \theta}{\omega}\right)^2 \left[1 + \frac{k_y}{k_z} \frac{\partial(n_0 V_0)}{\partial x} \frac{1}{n_0 \omega_{Be}}\right] = 0. \quad (6.41)$$

справедливого, если наряду с указанными выше предположениями принять также $\omega \gg k_z V_0$. Видно, что частота оказывается чисто мнимой, если

$$|\partial(n_0 V_0)/\partial x|/n_0 \omega_{Be} > k_z/k_y. \quad (6.42)$$

Инкремент возмущений порядка

$$\gamma \approx (m_e/m_i)^{1/2} \kappa V_0. \quad (6.43)$$

Как и в случае, рассмотренном в § 4.3, неустойчивость обусловлена конвекцией продольного тока вдоль x под действием полей E_y и B_0 .

В уравнении (6.41) опущены члены порядка $\omega^*/\omega \approx k_y \kappa \rho_i v_{Ti}/\omega$. Учитывая (6.43), находим, что это законно, если

$$V_0/v_{Ti} > (z_i m_i/m_e)^{1/2}. \quad (6.44)$$

В случае наиболее длинноволновых возмущений $k_\perp \approx \kappa$ это означает

$$V_0/v_{Ti} > (\rho_i/a) (m_i/m_e)^{1/2}. \quad (6.45)$$

Если это условие не удовлетворяется, то роль относительного движения электронов и ионов в возмущениях с $\omega \gg k_z v_{Te}$ не важна. При этом остаются в силе результаты п. 1 § 6.1. Переход от бестоковой неустойчивости к токовой показан на рис. 6.9.

2. **Возмущения с $\omega < k_z v_{Te}$, $z_i \ll 1$.** Кинетическая токово-конвективная неустойчивость. В отличие от п. 1 примем $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$. Как и раньше, считаем $z_i \ll 1$, $\Delta T = 0$. В этом случае имеем дисперсионное уравнение [ср. с (6.5)]

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} - \frac{k_z V_0}{\omega}\right) = 0. \quad (6.46)$$

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= \omega_{ne}; \\ \gamma &= \sqrt{\pi} \omega_{ne} V_0/v_{Te}. \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Инкремент наиболее длинноволновых возмущений, $k_\perp \approx \kappa$, порядка

$$\gamma \approx (m_e/m_i)^{1/2} \rho_i V_0/a^2. \quad (6.48)$$

Он мал по сравнению с гидродинамическим инкрементом (6.43), как ρ_i/a , но превосходит кинетический инкремент (6.13), если

$$V_0/v_{Ti} > \rho_i/a. \quad (6.49)$$

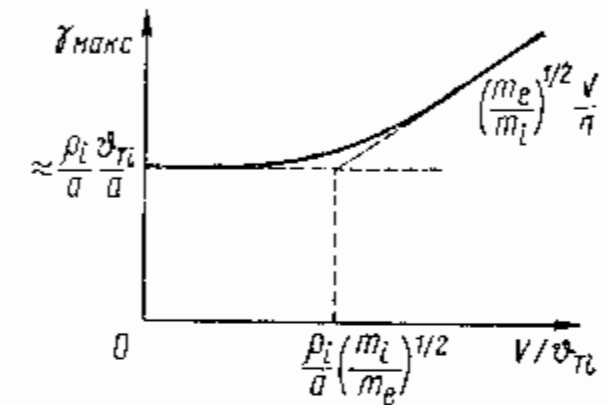


Рис. 6.9. Соответствие между инкрементами бестоковой (см. п. 1 § 6.1) и токовой (см. п. 1 § 6.3) гидродинамическими неустойчивостями при $k_\perp a \approx 1$

Неустойчивость типа (6.47) возможна только при довольно малом градиенте температуры:

$$\eta < 2V_0/v_{Te}. \quad (6.50)$$

Если в (6.46) учесть продольное движение ионов, то получим, что интервал $\cos \theta$, на котором $\gamma > 0$, порядка

$$\cos \theta \lesssim (\rho_i/a) (V_0/v_{Ti}). \quad (6.51)$$

Это соответствует более мелкомасштабным вдоль z возмущениям, чем в случае бестоковой плазмы [ср. с (6.14)].

§ 6.4. Струя плазмы с неоднородным профилем скорости

Пусть электроны и ионы плазмы движутся вдоль магнитного поля с одинаковой скоростью V , профиль которой неоднороден, $\partial V/\partial x \neq 0$. В такой плазме

могут развиваться электроно-ионные неустойчивости, механизм которых сходен с механизмом электронных неустойчивостей, рассмотренных в § 4.3.

В качестве примера рассмотрим неустойчивость на ионно-звуковой ветви. Предположим возмущения мелкомасштабными, $k_{\perp} a \gg 1$. Градиентом плотности пока пренебрежем. Будем интересоваться возмущениями с частотой, удовлетворяющей условиям $k_z v_{Ti} \ll |\omega - k_z V| \ll (k_z v_{Te}, \omega_{Bi})$. При этом, аналогично (4.45), можно получить дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{(kd_e)^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega'}\right)^2 \cos^2 \theta \left(1 - \frac{k_y}{k_z} \frac{1}{\omega_{Bi}} \frac{dV}{dx}\right) = 0; \quad (6.52)$$

$$\omega' \equiv \omega - k_z V.$$

Отсюда находим, что возмущения раскачиваются, если

$$\frac{k_z}{k_y} < \frac{1}{\omega_{Bi}} \frac{dV}{dx}. \quad (6.53)$$

Численно этот критерий отличается от (4.46) отношением масс.

Инкремент возмущений достигает максимума при

$$k_{z \text{ опт}} = \frac{1}{2} \frac{k_y}{\omega_{Bi}} \frac{dV}{dx}. \quad (6.54)$$

Он равен

$$\gamma_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \frac{k_y}{\omega_{Bi}} \left(\frac{T_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{dV}{dx}. \quad (6.55)$$

Результаты (6.54), (6.55) относятся к плазме с $T_e > T_i$. При $T_e \approx T_i$ следует опустить первый член в скобке (6.52) [так как должно быть $\omega' > k_z (T_e/m_i)^{1/2}$], а также учесть, что теперь $k_z \ll k_{z \text{ опт}}$. Тогда инкремент будет в несколько раз меньше по сравнению с (6.55).

При наличии градиента плотности вместо (6.52) имеем

$$(\omega')^2 - \omega' \omega_{ne} - \frac{T_e}{m_i} \left(k_z^2 - \frac{k_y k_z}{\omega_{Bi}} \frac{dV}{dx}\right) = 0. \quad (6.56)$$

Отсюда следует критерий стабилизации, аналогичный (4.49):

$$\frac{d \ln n_0}{d \ln V} > \frac{V}{(T_e/m_i)^{1/2}}. \quad (6.57)$$

Видно, что при $d \ln n_0 / d \ln V > 1$ неустойчивость невозможна, если скорость струи не превышает скорости ионно-звуковых колебаний.

§ 6.5. Плазма с примесью холодных ионов

Пусть в плазме имеется небольшая доля холодных ионов $v_{T1} \ll v_{Ti}$, плотность которых неоднородна, $\nabla n_0 \neq 0$. Наличие таких ионов приводит к появлению новой ветви колебаний, которая может раскачиваться горячими ионами.

При исследовании такого рода неустойчивости будем полагать $v_{T1} \ll \omega/k_z \ll (v_{Ti}, v_{Te})$, $\nabla T = 0$. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{(kd_e)^2} + \frac{1}{(kd_i)^2} \left[1 + i \frac{\sqrt{\pi} (\omega - \omega_{ni})}{|k_z| v_{Ti}}\right] + \frac{\kappa_1 k_y \omega_{pi}^2}{k^2 \omega \omega_{Bi}} = 0. \quad (6.58)$$

Здесь $\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_i / m_i$, $\omega_{Bi} = e_1 B_0 / m_i c$, $e_1 = -z_1 e$, z_1 — заряд ионов; $\kappa_1 = \partial \ln n_1 / \partial x$. При $T_1 = T_e$ это уравнение имеет решение:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= -\omega_{ni} (n_1 T / 2n_0 T_1) z_1^2; \\ \gamma &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(\text{Re } \omega)^2}{|k_z| v_{Ti}} \left(1 + \frac{2n_0}{n_1 z_1} \frac{\kappa}{\kappa_1}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

Возмущения раскачиваются: $\gamma > 0$, если градиент плотности примесных ионов не слишком велик и направлен против градиента плотности плазмы:

$$\kappa n_0 / \kappa_1 n_1 z_1 + 1/2 < 0. \quad (6.60)$$

Эта неустойчивость аналогична рассмотренной в п. 2 § 6.1 [ср., например, (6.59) с (6.13)]. Ветвь колебаний (6.59) обусловлена конвекцией примесных ионов, а инкремент — конвекцией резонансных ионов плазмы.

Библиографический обзор к гл. 6

1. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле. — «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, с. 581.
2. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. Микроскопические неустойчивости пространственно-неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Ядерный синтез. Докл. 1962», 1962, т. 2, с. 481.
В работах [1, 2] указано на возможность развития неустойчивостей в плазме с неоднородной температурой, § 6.2. Исследованы те из неустойчивостей, которые проявляются в пренебрежении поперечной инерцией ионов и членами порядка $k \rho$.
3. Кадомцев Б. Б. «Аномальная» диффузия разреженной плазмы с током в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 1688.
Установлено, что в плазме с током может развиваться кинетическая неустойчивость даже при $\nabla T = 0$, п. 2 § 6.3.
4. Кадомцев Б. Б., Тимофеев А. В. Дрейфовая неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 146, с. 581.
Найдена неустойчивость плазмы с неоднородной плотностью. Основные результаты этой работы приведены в § 6.1. В работе [4] были получены графические зависимости, изображенные на рис. 6.4, 6.5.
5. Михайловский А. Б., Рудаков Л. И. К вопросу об устойчивости пространственно-неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 912. Исследовались неустойчивости при $\omega > k_z v_{Ti}$, § 6.2.
6. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Универсальная» неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 903.
Исследовались неустойчивости плазмы с $T \neq 0$ и рассмотрены возмущения с $\omega < k_z v_{Ti}$, § 6.2.
7. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. Границы устойчивости дрейфовых волн в неоднородной плазме. — «Журн. техн. физ.», 1963, т. 33, с. 1200.
Проводится численный анализ границ неустойчивости плазмы с $\nabla T \neq 0, \nabla n \neq 0$, § 6.2. Показано, что при достаточно малой длине плазмы развитие неустойчивостей невозможно ни при каких $\partial \ln T / \partial \ln n$. Получена графическая зависимость, изображенная на рис. 6.8.
8. Михайловский А. Б. Колебания неоднородной плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 141.
9. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия. — «Атомная энергия», 1963, т. 15, с. 451.
10. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188.
Работы [8—10] содержат обзоры имевшихся к тому времени результатов по теории устойчивости неоднородной плазмы.

11. Рухадзе А. А., Силин В. П. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы. — «Успехи физ. наук», 1964, т. 82, с. 499.
В этой работе изложены результаты теории устойчивости, полученные методом геометрической оптики. Там же приведена подробная библиография более ранних работ этого направления.
12. Coppi B. Inertial instabilities in plasmas. — «Phys. Lett.», 1964, v. 11, p. 226.
13. Михайловский А. Б. Токово-конвективная неустойчивость бесстолкновительной плазмы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 380.
14. Ловецкий Е. Е., Рухадзе А. А. Теория гидродинамической устойчивости неоднородных плазменных токов. — «Ядерный синтез», 1966, т. 6, с. 9.
15. Михайловский А. Б. К теории устойчивости пространственно-неоднородного тока в плазме. I. Низкочастотные волны. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1933.
В работах [12—15] указано на гидродинамическую токовую неустойчивость, п. 1, § 6.3.
16. Михайловский А. Б. Электронная температурная неустойчивость неоднородной плазмы. — «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1365.
Указано на возможность развития электронно-звуковой неустойчивости в плазме с $\nabla T \neq 0$, § 6.2. Проводится подробный анализ этой неустойчивости.
17. Drift instability due to impurity ions. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 377. Auth.: B. Coppi et al.
Исследуется неустойчивость, связанная с примесями ионов, § 6.5.
18. Петвиашвили В. И. Неустойчивость неоднородного течения плазмы вдоль магнитного поля. — «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 206.
Исследуется раскачка ионно-звуковых колебаний в плазме с неоднородным профилем скорости, $\nabla V \neq 0$, § 6.4.
19. Krall N. A., Rosenbluth M. N. Universal instability in complex field geometries. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1488.
Исследовалась граница неустойчивости плазмы с $\nabla T = 0, \nabla n_0 \neq 0$. Получены результаты, аналогичные [4].
20. Porkolab M. Plasma drift instabilities with phase velocities below the ion thermal velocity. — «Phys. Lett.», 1966, v. 22, p. 427.
21. Porkolab M. Plasma instabilities due to ion temperature gradients. — «Nucl. Fusion», 1968, v. 8, p. 29.
Проводится численный анализ неустойчивостей плазмы с $\nabla T_i \neq 0$. Вычисляются инкременты возмущений с $\omega \leq k_z v_{Ti}$.
22. Коган Е. Я., Моисеев С. С. О низкочастотных неустойчивостях плазмы. — «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 805. Обращается внимание на важность возмущений $\omega \leq k_z v_{Ti}$ и $k_{\perp} \rho_i \gg 1$; в плазме с $\nabla T = 0$ такие возмущения плохо стабилизируются широм, см. гл. 12. Рассмотрены также неустойчивости плазмы с $[\nabla T, \nabla n_0] \neq 0$.
23. Силин В. П. Дрейфовая неустойчивость плазмы с заряженными примесями. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 945.
24. Байков И. С. Влияние примеси холодной плазмы на устойчивость горячей неоднородной плазмы. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 326.

25. Колесниченко Я. И., Ораевский В. Н. О неустойчивости неоднородной плазмы, вызываемой продуктами термоядерных реакций. — «Атомная энергия», 1967, т. 23, с. 289.
В работах [23—25] производится дальнейшее развитие теории примесных неустойчивостей (ср. с работой [17]).
26. Байков И. С., Рухадзе А. А. Возбуждение колебаний во встречных потоках неоднородной плазмы. — «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1913.
27. Пашицкий Э. А. Взаимодействие пространственно-неоднородных плазменных потоков в магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 1020.
В работах [26, 27] обсуждаются неустойчивости в сталкивающихся плазмах, в работе [26] — во взаимопроникающих, в работе [27] — в пространственно-разделенных.
28. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. Поверхностные волны в плазме с током. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 1787.
29. Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Устойчивость пространственно-неоднородной плазмы с током. — «Ядерный синтез», 1966, т. 6, с. 176.
30. Ловецкий Е. Е. К теории устойчивости токовой плазмы, ограниченной проводящими стенками. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 45.
31. Баканов С. П., Ловецкий Е. Е. К теории неустойчивости токовой плазмы, ограниченной проводящими стенками. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 1955.
32. Иванов Ю. Б., Ловецкий Е. Е. Поверхностные волны в плазме с током, ограниченной проводящими стенками. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 8.
В работах [28—32] исследуются неустойчивости неоднородной плазмы с током.

Глава 7

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ
СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ§ 7.1. Пределы применимости
бесстолкновительного приближения
и диэлектрическая проницаемость
почти бесстолкновительной плазмы

Поскольку частота кулоновских столкновений зависит от плотности и температуры по закону $\nu \sim nT^{-3/2}$, столкновения могут влиять на неустойчивости только в случае достаточно плотной и холодной плаз-

мы. К рассмотрению таких плазм мы теперь переходим. В этой главе получим исходные уравнения, описывающие неустойчивости столкновительной плазмы. Анализ конкретных типов неустойчивостей проведем в гл. 8. Столкновениями заряженных частиц с нейтральными будем пренебрегать. Эти эффекты, существенные для слабоионизованной плазмы, обсуждаются в гл. 11.

Вначале укажем критерии несущественности столкновений в различных типах градиентных неустойчивостей и приведем выражения для столкновительных поправок к диэлектрической проницаемости.

1. Возмущения с $\omega > k_z v_{Te}$, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$. С помощью кинетического уравнения со столкновительным членом $S_{\alpha\beta}$ в форме Ландау (см. приложение к настоящей главе) методом последовательных приближений можно найти, что столкновительные добавки к $\epsilon_0^{(\alpha)}$ для указанного типа возмущений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta\epsilon_0^{(e)} &= i \frac{\nu_{ei}}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{\omega} + \frac{\omega_{Te}}{2\omega} \right); \\ \delta\epsilon_0^{(i)} &= \frac{7}{10} i \frac{\nu_{ii}}{\omega} z_i \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} + \frac{3}{28} \frac{\omega_{Ti}}{\omega} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Здесь $\nu_{ei} = 0,51/\tau_e$; $\nu_{ii} = 1/\tau_i$ — частоты электронно-ионных столкновений. Малыми параметрами, по которым производится разложение в ряд, являются величины ν_{ei}/ω , ν_{ii}/ω .

В п. 1 § 6.1 было показано, что при $\omega \gg k_z v_{Te}$, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ в плазме раскачиваются возмущения с $\gamma \approx \omega_{ne}$. Из (7.1) следует, что в этом случае столкновения не играют роли, если $\omega_{ne} > \nu_{ei}$. В случае $k_{\perp} \approx 1/a$ это неравенство означает

$$S_e \equiv \lambda_e \rho_e / a^2 > 1, \quad (7.2)$$

где $\lambda_e \approx v_{Te}/\nu_{ei}$ — длина свободного пробега электрона.

Неустойчивость, рассмотренная в § 6.1, развивается только при достаточно малых k_z [критерий (6.4)]. При $k_z > k_{z \text{ гран}}$ из бесстолкновительного приближения следует $\gamma = 0$. При таких k_z столкновения необходимо учитывать, даже если выполнено условие (7.2), поскольку столкновительная диссипация может привести к развитию новой неустойчивости с $\gamma < \omega_{ne}$ (см. ниже, п. 1 § 8.2.).

2. **Возмущения с $v_{Ti} < \omega/k_z < v_{Te}$, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$.** Столкновительная добавка к $\epsilon_0^{(e)}$ в этом случае мала по сравнению с $\text{Im} \epsilon_0^{(e)}$ (частью $\epsilon_0^{(e)}$, обусловленной бесстолкновительной диссипацией), если $k_z v_{Te} > v_{ei}$. Последнее неравенство можно представить в наглядном виде:

$$\lambda_{\parallel} < \lambda_e, \quad (7.3)$$

где $\lambda_{\parallel} \approx 1/k_z$ — продольная длина волны.

При $\omega \gg v_{ii}$ и $z_i > (k_z v_{Ti})^2$ добавка к $\epsilon_0^{(i)}$ определяется второй формулой (7.1). Используя эту формулу, найдем, что при рассмотрении кинетической неустойчивости п. 2 § 6.1 ионно-ионными столкновениями можно пренебречь, если $v_{ii}/\omega < z_i$, т. е.

$$\lambda_i/a > z_i^{3/2}, \quad (7.4)$$

где $\lambda_i \approx v_{Ti}/v_{ii}$ — длина свободного пробега ионов (при $T_e \approx T_i$, $\lambda_e \approx \lambda_i$).

На границе применимости длинноволнового приближения для ионов $z_i \approx 1$ условие (7.4) имеет простой смысл:

$$\lambda_i > a. \quad (7.5)$$

3. **Возмущения с $\omega \approx k_z v_{Ti}$, $k_{\perp} \rho_i < 1$.** Раскачка таких возмущений имеет место в плазме с неоднородно нагретыми ионами (§ 6.2). В этом случае столкновения не важны, если $\omega_{Ti} > v_{ii}$. При $k_{\perp} \approx 1/a$ это неравенство означает

$$S_i \equiv \lambda_i \rho_i / a^2 > 1. \quad (7.6)$$

При $k_{\perp} \rho_i \approx 1$ вместо этого имеем (7.5).

4. **Возмущения с $\omega \approx k_z v_{Te}$, $k_{\perp} \rho_i > 1$, $k_{\perp} \rho_e < 1$.** Относительно таких возмущений неустойчива плазма с неоднородно нагретыми электронами (п. 2 § 6.2). Роль ионов в этом случае мало существенна. Поэтому на развитие неустойчивости могут оказывать влияние только электронные столкновения. Последними можно пренебречь, если $\omega_{Te} > v_{ei}$. При $k_{\perp} \rho_i \approx 1$ это неравенство сводится к

$$\lambda_e > (m_i/m_e)^{1/2} a, \quad (7.7)$$

а при $k_{\perp} \rho_e \approx 1$ — к условию, аналогичному (7.5):

$$\lambda_e > a. \quad (7.8)$$

5. **Коротковолновые возмущения, $k_{\perp} \rho_i \gg 1$,** в которых важно движение ионов. При $z_i \ll 1$ ионно-ионные столкновения можно считать слабыми, если

$$|\omega - n\omega_{Bi}| > z_i v_{ii}. \quad (7.9)$$

В правой части неравенства стоит большой параметр z_i , а не просто единица, потому что столкновительный член содержит вторые производные по скорости [см. уравнение (п. 7.3)], которые, действуя на экспоненту $\exp[i\xi \sin(\alpha - \psi)]$ в возмущенной функции распределения [см., например, (4.98)], приводят к дополнительному множителю перед v_{ii} порядка $\xi^2 \approx z_i$. Столкновительная добавка к $\epsilon_0^{(i)}$ для этого случая была вычислена А. А. Рухадзе и В. П. Силиным. Полное $\epsilon_0^{(i)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(i)} = & \frac{1}{(kd_i)^2} \left\{ 1 - \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi z_i}} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} \left[1 - \right. \right. \\ & - \frac{\omega_{ni}}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ti}}{\omega} - i \frac{v_{ii} z_i}{\omega - n\omega_{Bi}} \frac{3(\pi + 1)}{2\sqrt{2}} \times \\ & \left. \left. \times \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} + \frac{3\pi + 2}{4\pi + 2} \frac{\omega_{Ti}}{\omega} \right) \right] \right\}. \quad (7.10) \end{aligned}$$

а. Низкочастотные коротковолновые возмущения. В п. 3 § 6.1 была рассмотрена неустойчивость с $k_{\perp} \rho_i \gg 1$, $\gamma \approx v_{Ti}/a$. Из (7.9) следует, что ионно-ионными столкновениями в этом случае можно пренебречь, если

$$\lambda_i/a > z_i. \quad (7.11)$$

При $z_i \approx 1$ этот результат согласуется с (7.5).

б. Циклотронные возмущения. Как показано в § 5.1, в плазме с $\rho_i/a > 2(m_e/m_i)^{1/2}$ могут раскачиваться коротковолновые циклотронные колебания с $\gamma \approx (\rho_i/a)^{1/2} \omega_{Bi}$, $k_{\perp} \rho_i \approx a/\rho_i$. Условие пренебрежимо малых столкновений (7.9) в этом случае означает

$$v_{ii}/\omega_{Bi} < (\rho_i/a)^{3/2}. \quad (7.12)$$

В частности, при $\rho_i/a \approx (m_e/m_i)^{1/2}$ должно быть

$$v_{ii}/\omega_{Bi} < (m_e/m_i)^{3/4}. \quad (7.13)$$

Из (7.11)—(7.13) следует, что бесстолкновительное приближение для коротковолновых ионных неустойчивостей оправдывается при гораздо более редких столкновениях, чем в случае $k_{\perp} \rho_i \leq 1$.

§ 7.2. Макроскопические уравнения столкновительной плазмы

1. **Постановка задачи.** Найдем решение кинетического уравнения в приближении частых столкновений (параметры разложения укажем ниже). Магнитное поле предполагаем однородным, $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$, $\nabla B_0 = 0$, а электрическое — потенциальным, $\text{rot } \mathbf{E} \rightarrow 0$.

Скорость частицы \mathbf{v} выражаем через $v_z^{(a)}$, v_{\perp} , α , определенные соотношением

$$\mathbf{v} = (v_z^{(a)} + V_z^{(a)}) \mathbf{e}_z + v_{\perp} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y), \quad (7.14)$$

где $V_z^{(a)}$ — средняя скорость a -й компоненты плазмы вдоль магнитного поля.

Функцию распределения и столкновительный член представляем в виде

$$f = \bar{f} + \tilde{f}; \quad C = \bar{C} + \tilde{C}, \quad (7.15)$$

где черта сверху означает среднее по α , а тильда — осцилляции по α . Из уравнения Больцмана следуют уравнения для \bar{f} и \tilde{f} :

$$\widehat{L}_{\parallel} \bar{f} + \widehat{L}_{\perp} \bar{f} + \widehat{L}_{\perp} \tilde{f} - \langle \widehat{L}_{\perp} \tilde{f} \rangle - \bar{C} = \omega_B \frac{\partial \bar{f}}{\partial \alpha}; \quad (7.16)$$

$$\widehat{L}_{\parallel} \tilde{f} + \langle \widehat{L}_{\perp} \tilde{f} \rangle = \tilde{C}. \quad (7.17)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \widehat{L}_{\parallel} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_z^{(a)} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{e}{m} E_z - \frac{\partial V_z^{(a)}}{\partial t} - \frac{\partial V_z^{(a)}}{\partial z} v_z^{(a)} \right) \frac{\partial}{\partial v_z^{(a)}}; \\ \widehat{L}_{\perp} &= \mathbf{v}_{\perp} \nabla + \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{\perp}} - (\mathbf{v}_{\perp} \nabla) V_z^{(a)} \frac{\partial}{\partial v_z^{(a)}}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial t} + V_z^{(a)} \frac{\partial}{\partial z}; \end{aligned} \right\} (7.18)$$

$\langle \dots \rangle$ — усреднение по α .

Уравнение (7.16) можно решать разложением в ряд по $1/\omega_B$, а (7.17) — по $1/v$, если

$$\left\{ \frac{v}{\omega_B}, \frac{\rho}{a_{\perp}}, \frac{eE_{\perp}}{m\omega_B v_T}, \frac{\omega}{v}, \frac{eE_z}{mvv_T}, \frac{v_T}{a_{\parallel} v}, \frac{a_{\perp}}{a_{\parallel}} \right\} \ll 1; \quad (7.19)$$

a_{\perp} — характерный поперечный размер; a_{\parallel} — продольный. Наряду с (7.19) примем также, что

$$(V_{ze} - V_{zi})/v_{Te} \ll 1. \quad (7.20)$$

Это упрощает электронно-ионный интеграл столкновений (ср. с приложением к настоящей главе).

Для определенности полагаем параметры (7.19), (7.20) одного порядка величины и обозначаем этот порядок $\epsilon \ll 1$. Функции \bar{f} , \tilde{f} ищем в виде ряда по степеням ϵ :

$$\bar{f} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{f}^{(k)}, \quad \tilde{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}^{(k)}. \quad (7.21)$$

В сумме для \tilde{f} отсутствует нулевой член ряда, так как в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ решением кинетического уравнения является максвелловская функция, а последняя не зависит от α .

Как и в приложении, полагаем, что функция $\bar{f}^{(0)}$ дает точные значения плотности n , средней продольной скорости V_z и температуры T . Поперечная скорость $\mathbf{V}_{\perp} \equiv \frac{1}{n} \int \tilde{f} \mathbf{v}_{\perp} d\mathbf{v}$ является малой величиной и имеет вид ряда, аналогичного (7.21).

Производные $\partial(n, V_z, T)/\partial t$ представляют собой ряды по степеням ϵ (аналогично приложению, по с тем отличием, что теперь \mathbf{V}_{\perp} — также ряд). Рядами по ϵ являются и произведения оператора \widehat{L}_{\parallel} на n , V_z , T .

Члены таких рядов определяются следующими символическими соотношениями;

$$\left. \begin{aligned} \widehat{L}_{\parallel}(\epsilon_0) &= \frac{\partial_a^0}{\partial t} + v_z^{(a)} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{e}{m} E_z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial_a^0 V_z}{\partial t} - \frac{\partial V_z}{\partial z} v_z^{(a)} \right) \frac{\partial}{\partial v_z^{(a)}}; \\ \widehat{L}_{\parallel}(\epsilon^k) &= \frac{\partial^k}{\partial t} + \frac{\partial^k V_z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v_z^{(a)}}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial_a^0}{\partial t} &= \left(\frac{\partial_a n}{\partial t} \right)^0 \frac{\partial}{\partial n} + \left(\frac{\partial_a V_z}{\partial t} \right)^0 \frac{\partial}{\partial V_z} + \\ &+ \left(\frac{\partial_a T}{\partial t} \right)^0 \frac{\partial}{\partial T} + \left(\frac{\partial_a}{\partial t} \right)_{n, V_z, T}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Последний член в правой части (7.23) учитывает действие оператора $\partial/\partial t$ на функции, не зависящие явно от n, V_z, T . В принятом здесь приближении однородного магнитного поля единственной функцией такого типа является электрическое поле E .

В виде рядов, аналогичных (7.21), представляем и столкновительный член C . Условимся также, что слагаемые C_e, C_i , малые как $(m_e/m_i)^{1/2}$, порядка ϵ , а m_e/m_i — порядка ϵ^2 .

2. **Первое приближение по ϵ .** Учитывая, что в пулевом приближении по ϵ функция $\bar{f} \equiv \bar{f}^{(0)}$ — это максвелловская функция F от аргументов $v_{\perp}^2, (v_z^{(a)})^2$, из уравнения (7.16) находим

$$\bar{f}^{(1)} = F v_{\perp} \left[\frac{\mathbf{e}_z}{\omega_B}, \quad \nabla \ln F - \frac{e \mathbf{E}_{\perp}}{T} + \frac{m v_z^{(a)}}{T} \nabla V_z \right]. \quad (7.24)$$

Подставляя это выражение в левую часть (7.17), получаем уравнение для $\bar{f}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{D^0 F}{Dt} + \frac{m v_z^{(a)}}{T} F \frac{D^0 V_z}{Dt} + v_z^{(a)} \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{e E_z}{T} F \right) + \\ + \frac{m (v_z^{(a)})^2}{T} F \frac{\partial V_z}{\partial z} = \bar{C}^{(1)}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Здесь $D^0/Dt = \partial^0/\partial t + V_z \partial/\partial z + \mathbf{V}_E \nabla$; $\mathbf{V}_E = c[\mathbf{E} \mathbf{e}_z]$ — скорость электрического дрейфа.

Интегрируя (7.25) по скоростям, находим

$$\begin{aligned} \frac{D^0(n; V_z; T)}{Dt} = \left(-n \frac{\partial V_z}{\partial t}; \quad \frac{e}{m} E_z - \right. \\ \left. - \frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{R_z(\epsilon)}{mn}; \quad -\frac{2}{3} T \frac{\partial V_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Здесь $R_z(\epsilon)$ — z -компонента силы трения. Она не зависит от магнитного поля. Ее выражение приведено в приложении.

Исключая с помощью (7.26) производные D^0/Dt в (7.25), приходим к уравнениям для $\bar{f}_a^{(1)}$, аналогичным тем, которые получаются в отсутствие магнитного поля (см. приложение). В частности, уравнение для $\bar{f}_i^{(1)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_{ii}[F_i, \bar{f}_i^{(1)}] = F_i \left[\left(\frac{m_i v^2}{2T_i} - \frac{5}{2} \right) v_z \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \ln T_i}{\partial z} + \frac{m_i}{T_i} \left(v_z^2 - \frac{v^2}{3} \right) \frac{\partial V_z^{(i)}}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Индекс i у v для простоты опущен. Решение (7.27) сводится к найденному С. И. Брагинским, с тем отличием, что вместо $W_{zz} \equiv 2(\partial V_z/\partial z - \text{div} \mathbf{V}^{(i)}/3)$ в выражение для $\bar{f}_i^{(1)}$ входит $(4/3)\partial V_z/\partial z$. Это отличие будет разъяснено в § 7.4.

3. **Второе приближение по ϵ .** Подставляя в (7.16) результаты первого приближения, находим

$$\bar{f}^{(2)} = \bar{f}_1^{(2)} + \bar{f}_2^{(2)}, \quad (7.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_1^{(2)} &= -\frac{1}{\omega_B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\widehat{L}_{\perp} \bar{f}^{(1)} - \bar{C}^{(1)}); \\ \bar{f}_2^{(2)} &= -\frac{1}{4\omega_B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\widehat{L}_{\perp} \bar{f}^{(1)}). \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Функция $\bar{f}^{(2)}$ — поправка к $\bar{f}^{(1)}$ порядка ρ/a_{\perp} либо v/ω_B . Поскольку $\rho_e \ll \rho_i, (v/\omega_B)_e \ll (v/\omega_B)_i$, то можно ограничиться

учетом только ионной поправки. С той же степенью точности в (7.29) можно пренебречь величиной $C_{ie}^{(1)}$.

Во втором порядке по ε из (7.17) следует:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{\parallel}(\varepsilon^0) \bar{f}^{(1)} + \left(\frac{\partial^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^{(1)} V_z}{\partial t} \frac{mv_z^{(a)}}{T} \right) F + \\ + \mathbf{v}_E \left(\nabla \bar{f}^{(1)} - \nabla V_z \frac{\partial \bar{f}^{(1)}}{\partial v_z^{(a)}} \right) + \frac{1}{\omega_B} \left[\mathbf{e}_z \cdot \nabla + \right. \\ \left. + \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}^2/2} - \nabla V_z \frac{\partial}{\partial v_z^{(a)}} \right] \langle \mathbf{v}_{\perp} \bar{C}^{(1)} \rangle = \bar{C}^{(2)}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Используя явный вид выражения для $\bar{C}^{(1)}$, из (7.30) находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^{(1)} n}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial^{(1)} V_z}{\partial t} = -\frac{1}{mn} \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{mn} \operatorname{div} \pi_{z\perp}^{(2)}; \\ \frac{3}{2} n \frac{\partial^{(1)} T}{\partial t} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \operatorname{div} \mathbf{q}_{\perp}^{(2)} + \pi_{zz} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \pi_{z\perp}^{(2)} \nabla V_z = Q. \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Предполагается, что π_{zz} , $\mathbf{q}_{\perp}^{(2)}$, $\pi_{z\perp}^{(2)}$ входят только в ионные уравнения. Выражения для $q_z^{(e)}$, $q_z^{(i)}$, Q_i имеют такой же вид, как и при $B_0 = 0$ (см. приложение). Величина Q_e не содержит члена с $\mathbf{R}(\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{V}^{(i)})$, он более высокого порядка, чем ε^2 , поэтому $Q_e = -Q_i$. Выражение для π_{zz} отличается от случая $B_0 = 0$ тем, что теперь отсутствует член с $\operatorname{div} \mathbf{V}_{\perp}$. Поперечные компоненты ионного потока тепла $\mathbf{q}_{\perp}^{(i)}$ и тензор $\pi_{z\perp}^{(i)}$ имеют вид

$$\mathbf{q}_{\perp}^{(i) \cdot (2)} = -\kappa_{\perp}^{(i)} \nabla T_i; \quad \pi_{z\perp}^{(2)} = \eta_{\perp}^{(i)} \nabla_{\perp} V_z^{(i)}, \quad (7.32)$$

где коэффициенты

$$\kappa_{\perp}^{(i)} = 2p_i/m_i \omega_{Bi}^2 \tau_i; \quad \eta_{\perp}^{(i)} = (6/5) p_i/\omega_{Bi}^2 \tau_i. \quad (7.33)$$

Чтобы найти $\bar{f}^{(2)}$, необходимо подставить (7.31) в (7.30). Однако выражение для $\bar{f}^{(2)}$ нам в последующем не понадобится.

4. Суммирование результатов первого и второго приближений. С точностью до членов порядка ε^2 включительно уравнения для n , V_z , T имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha} n_{\alpha} / Dt + n_{\alpha} \partial V_z^{(\alpha)} / \partial z = 0; \quad \alpha = (e, i); \\ m_e n_e D_e V_z^{(e)} / Dt = e_e n_e E_z - \partial p_e / \partial z + R_z^{(e)}; \\ m_i n_i D_i V_z^{(i)} / Dt = e_i n_i E_z - \partial p_i / \partial z - R_z^{(e)} - \partial \pi_{zz}^{(i)} / \partial z - \\ - \operatorname{div} \pi_{z\perp}^{(2) \cdot (i)}; \\ \frac{3}{2} n_e D_e T_e / Dt + p_e \partial V_z^{(e)} / \partial z + \partial q_z^{(e)} / \partial z = Q_e; \\ \frac{3}{2} n_i D_i T_i / Dt + p_i \partial V_z^{(i)} / \partial z + \partial q_z^{(i)} / \partial z + \operatorname{div} \mathbf{q}_{\perp}^{(i) \cdot (2)} + \\ + \pi_{zz}^{(i)} \partial V_z^{(i)} / \partial z + \pi_{z\perp}^{(2)} \nabla V_z^{(i)} = Q_i. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Здесь $D_{\alpha} / Dt = \partial / \partial t + V_z^{(\alpha)} \partial / \partial z + \mathbf{V}_E \cdot \nabla$, выражения для \mathbf{q}_{\perp} , $\pi_{z\perp}$ определяются соотношениями (7.32), (7.33), а выражения для $R_z^{(e)}$, $\pi_{zz}^{(i)}$, $q_z^{(e)}$, $q_z^{(i)}$, Q_e , Q_i имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} R_z^{(e)} = -0,51 \frac{m_e n_e}{\tau_e} (V_z^{(e)} - V_z^{(i)}) - 0,71 n_e \frac{\partial T_e}{\partial z}; \\ \pi_{zz}^{(i)} = -0,96 p_i \tau_i \frac{4}{3} \frac{\partial V_z^{(i)}}{\partial z}; \quad q_z^{(i)} = -3,9 \frac{p_i \tau_i}{m_i} \frac{\partial T_i}{\partial z}; \\ q_z^{(e)} = -3,16 \frac{p_e \tau_e}{m_e} \frac{\partial T_e}{\partial z}; \\ Q_i = -Q_e = 3 \frac{m_e}{m_i} \frac{n_e}{\tau_e} (T_e - T_i); \\ \tau_e = 3 \sqrt{m_e} T_e^{3/2} (4 \sqrt{2\pi} \lambda e^2 n_e); \\ \tau_i = 3 \sqrt{m_i} T_i^{3/2} (4\pi \lambda e^4 n_i); \quad \lambda - \text{кулоновский логарифм.} \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

При выводе макроскопических уравнений (7.34) предполагалось, что параметры (7.13) малы, как $\varepsilon \ll 1$. Из этого, в частности, следует что

$$\omega / \omega_{Bi} \sim (\rho_i / a)^2 \sim \varepsilon^2. \quad (7.36)$$

Это соответствует процессам, частота которых порядка частоты градиентных неустойчивостей, $\omega \approx \omega^*$ (см. гл. 6).

§ 7.3. Макроскопические уравнения с учетом поперечной инерции и поперечной вязкости ионов

При очень малых k_z/k_{\perp} суммарный вклад электронов и ионов в уравнение электронейтральности относительно мал [см. уравнение непрерывности систе-

мы (7.34)]. В связи с этим ионное уравнение непрерывности необходимо при $k_z/k_\perp \rightarrow 0$ дополнить вкладом членов порядка ε^3 , соответствующих, как будет показано в § 7.4, поперечной инерции и поперечной магнитной вязкости ионов. Если же преследуется цель исследования при столь малых k_z/k_\perp диссипативных эффектов, то необходимо учесть и члены порядка ε^4 , соответствующие поперечной столкновительной вязкости ионов.

Чтобы учесть указанные эффекты, нужно вычислить $\partial^{(2)}n/\partial t$ и $\partial^{(3)}n/\partial t$. Из (7.11) находим, что эти величины удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial^{(2)}n}{\partial t} + \int dv \widehat{L}_\perp \widetilde{f}_1^{(3)} = 0; \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial^{(3)}n}{\partial t} + \int dv \widehat{L}_\perp \widetilde{f}_1^{(4)} = 0. \quad (7.38)$$

Индекс 1 внизу $\widetilde{f}^{(n)}$ означает часть $\widetilde{f}^{(n)}$, пропорциональную $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ [как и в уравнении (7.28)].

Выражения для $\widetilde{f}_1^{(3)}$ и $\widetilde{f}_1^{(4)}$ находим с помощью (7.16):

$$\widetilde{f}_1^{(3)} = -\frac{1}{\omega_B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\partial \widetilde{f}_1^{(1)}}{\partial t} + \widehat{L}_\perp \widetilde{f}^{(2)} + (\widehat{L}_\perp \widetilde{f}^{(2)})_1 - \widetilde{C}_1^{(2)} \right\}; \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_1^{(4)} = & -\frac{1}{\omega_B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\partial \widetilde{f}_1^{(2)}}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^{(1)}\widetilde{f}^{(1)}}{\partial t} + \widehat{L}_\perp \widetilde{f}^{(3)} + (\widehat{L}_\perp \widetilde{f}^{(3)})_1 - \widetilde{C}_1^{(3)} \right\}. \quad (7.40) \end{aligned}$$

1. Члены порядка ε^3 . Подставляя (7.39) в (7.28), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}n}{\partial t} - \frac{1}{m\omega_B^2} \operatorname{div} \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} (\nabla_\perp p - en\mathbf{E}_\perp) - \\ - \frac{1}{\omega_B} \operatorname{rot}_z \int dv v_\perp (\widehat{L}_\perp \widetilde{f}_2^{(2)})_1 = 0. \quad (7.41) \end{aligned}$$

При вычислении интеграла в (7.41) используем формулу (7.29) для $\widetilde{f}_2^{(2)}$. В результате находим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_z \int dv v_\perp (\widehat{L}_\perp \widetilde{f}_2^{(2)})_1 = \operatorname{div} [\mathbf{e}_z, (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_L) \times \\ \times (\mathbf{V}_E \nabla) n - n(\mathbf{V}_E \nabla)(\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_L)]. \quad (7.42) \end{aligned}$$

Подставляя (7.42) в (7.41), получаем окончательно

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t} + \operatorname{div} \left[n \frac{\mathbf{e}_z}{\omega_B}, \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla \right) (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_L) \right] = 0. \quad (7.43)$$

Здесь $\mathbf{V}_L \equiv [\mathbf{e}_z, \nabla p]/m n \omega_B$ — средняя скорость ларморовских токов (ср. с § 4.6).

Используя (7.43), находим, что при учете членов порядка ε^2 уравнение непрерывности для ионов, содержащееся в системе (7.34), должно быть заменено следующим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla \right) n + \frac{\partial (nV_z)}{\partial z} + \\ + \operatorname{div} \left[n \frac{\mathbf{e}_z}{\omega_B}, \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla \right) (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_L) \right] = 0. \quad (7.44) \end{aligned}$$

2. Члены порядка ε^4 . Подставляя (7.40) в (7.38) и используя (7.31), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 n}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{1}{m\omega_B^2} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{q}_\perp - Q) - \\ - \frac{1}{\omega_B} \operatorname{rot}_z \int dv v_\perp (\widehat{L}_\perp \widetilde{f}_1^{(3)})_1 = 0. \quad (7.45) \end{aligned}$$

Необходимое нам выражение для $\widetilde{f}_2^{(3)}$ имеет вид

$$\widetilde{f}_2^{(3)} = -\frac{1}{4\omega_B^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \widehat{L}_\perp \frac{\partial \widetilde{C}^{(1)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{4\omega_B} \frac{\partial \widetilde{C}_2^{(2)}}{\partial \alpha}, \quad (7.46)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{C}^{(1)} = C_{ii} [F_i, \widetilde{f}_i^{(1)}]; \\ \widetilde{C}_2^{(2)} = C_{ii} [\widetilde{f}_i^{(1)}, \widetilde{f}_i^{(1)}] - \langle C_{ii} [\widetilde{f}_i^{(1)}, \widetilde{f}_i^{(1)}] \rangle + \\ + C_{ii} [F_i, \widetilde{f}_{2i}^{(2)}]. \quad (7.47) \end{aligned}$$

Ниже ограничимся вычислением интеграла в (7.45) в предположении $\nabla T_i = 0$. При этом, согласно (7.24), $\widetilde{f}^{(1)}$ имеет вид $\widetilde{f}^{(1)} = (\mathbf{b}\mathbf{v}) F$, вследствие чего $\widetilde{C}^{(1)} = 0$,

а вклад в (7.45) члена с $\bar{C}_{il} [\tilde{f}^{(1)}, \tilde{f}^{(1)}]$ окажется равным нулю. Для простоты будем считать столкновения не слишком частыми и пренебрежем членом с Q . В результате (7.45) запишем в виде

$$\frac{\partial^{(3)} n}{\partial t} - \frac{1}{4\omega_B^2} \text{rot}_z \int d\mathbf{v} \mathbf{v}_\perp (\mathbf{v}_\perp \nabla) \times \times \frac{\partial}{\partial \alpha} C_{il} [F_i, \tilde{f}_{i2}^{(2)}] = 0. \quad (7.48)$$

Стоящий здесь интеграл сводится к вычисленным интегралам в работе С. И. Брагинского. Результат удобно записать через поперечную скорость $\mathbf{V}_\perp^{(1)}$, при $\nabla T = 0$ равную

$$\mathbf{V}_\perp^{(1)} \equiv \frac{1}{n} \int \mathbf{v}_\perp f^{(1)} d\mathbf{v} = \frac{cT}{eB_0} [\mathbf{e}_z, \nabla \ln n] + \mathbf{V}_E. \quad (7.49)$$

Окончательно имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{m\omega_B} \left\{ \text{rot}_z \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \eta_{\perp l} \frac{\partial \mathbf{V}_\perp^{(1)}}{\partial x_k} \right) + \left[\nabla \frac{\partial \eta_{\perp l}}{\partial x_k}, \nabla \mathbf{V}_\perp^{(1)} \right]_z \right\} = 0, \quad (7.50)$$

где $\eta_{\perp l} = 0,3\rho_i/\omega_{Bi}^2\tau_i$.

В результате система макроскопических уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla n_e + \frac{\partial (n_e V_z^{(e)})}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla n_i + \frac{\partial (n_i V_z^{(i)})}{\partial z} + \text{div} \left[n_i \frac{\mathbf{e}_z}{\omega_{Bi}} \right. \\ \left. \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla \right) \mathbf{V}_\perp^{(i)} \right] + \frac{1}{m_i \omega_{Bi}} \left\{ \text{rot}_z \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \eta_{\perp l} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial \mathbf{V}_\perp^{(i)}}{\partial x_k} \right) + \left[\nabla \frac{\partial \eta_{\perp l}}{\partial x_k}, \nabla \mathbf{V}_\perp^{(i)} \right]_z \right\} &= 0; \\ m_e n_e D_e V_z^{(e)} / Dt = e_e n_e E_z - \frac{\partial p_e}{\partial z} + R_z^{(e)}; \\ (3/2) n_e D_e T_e / Dt + p_e \frac{\partial V_z^{(e)}}{\partial z} + \frac{\partial q_z^{(e)}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

Здесь не предполагается $T_e = T_i$, так что в линеаризованных уравнениях учитывается возмущение электронной температуры, даже если $T_{0e} = T_{0i}$.

§ 7.4. Гидродинамическая трактовка макроскопических уравнений § 7.2 и 7.3

В § 7.2 и 7.3 кинетическое уравнение решалось в предположении, что средняя поперечная скорость $\mathbf{V}_\perp^{(a)}$ мала. Вместо этого можно было использовать изложенный в приложении подход Чепмена — Энскога, при котором $\mathbf{V}_\perp^{(a)}$ считается величиной нулевого порядка. Тогда получилась бы следующая система уравнений для n, \mathbf{V}, T :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n \mathbf{V} &= 0; \\ mn \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) &= \\ = en \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{V}, \mathbf{B}]}{c} \right) - \nabla p - \text{div } \overset{\leftrightarrow}{\pi} + \mathbf{R}; \\ \frac{3}{2} n \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T \right] + p \text{div } \mathbf{V} &= \\ = -\text{div } \mathbf{q} - \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + Q, \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

где вязкость $\overset{\leftrightarrow}{\pi}$, поток тепла \mathbf{q} , сила трения \mathbf{R} и передача тепла Q — некоторые функции n, \mathbf{V}, T .

Выясним, как из (7.52) можно было бы получить приведенные в § 7.2 и 7.3 макроскопические уравнения, содержащие $\partial(n, V_z, T)/\partial x_i$, и с какой точностью необходимо вычислять потоки $\overset{\leftrightarrow}{\pi}, \mathbf{q}$ и т. д., чтобы в (7.52) содержались все члены, учтенные в уравнениях § 7.2 и 7.3.

1. Уравнения порядка ϵ . В этом приближении мы имеем систему уравнений (7.26) для (n, V_z, T) и выражение (7.24) для осциллирующей по углу α части функции распределения $f^{(1)}$. С последней связаны следующие макроскопические параметры плазмы.

а. Скорость движения компонент плазмы поперек магнитного поля

$$\mathbf{V}_\perp^{(1)} = \frac{1}{\omega_B} \left[\mathbf{e}_z, \frac{\nabla p}{mn} - \frac{e}{m} \mathbf{E} \right]. \quad (7.53)$$

б. Вектор потока тепла поперек магнитного поля

$$\mathbf{q}_{\perp}^{(1)} = \frac{5}{2} \frac{p}{m\omega_B} [\mathbf{e}_z, \nabla T]. \quad (7.54)$$

в. Компоненты тензора вязкости с индексами (x, z) и (y, z)

$$\pi_{\perp z}^{(1)} \equiv (\pi_{xz}^{(1)}, \pi_{yz}^{(1)}, 0) = \frac{p}{\omega_B} [\mathbf{e}_z, \nabla V_z]. \quad (7.55)$$

Используя (7.53) — (7.55), систему (7.26) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d_a n}{dt} + n \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0; \\ mn \frac{d_a V_z}{dt} &= enE_z - \frac{\partial p}{\partial z} - (\nabla \pi)_z + R_z; \\ en \left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{[\mathbf{V}, \mathbf{B}]}{c} \right) &= 0; \\ \frac{3}{2} n \frac{d_a T}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{V} &= -\operatorname{div} \mathbf{q}. \end{aligned} \right\} \quad (7.56)$$

Здесь, как и в приложении, $d_a/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V}\nabla)$.

Таким образом, уравнения порядка ϵ являются следствием такого приближения гидродинамики, в котором учитываются тепловой поток \mathbf{q} и тензор вязкости π порядка ϵ . При нахождении добавки функции распределения методом Чепмена — Энского эти члены в \mathbf{q} и π появляются в первом порядке по параметрам разложения, т. е. для этого достаточно вычислить только f_1 по схеме Чепмена — Энского. Функция f_1 и соответствующие члены в \mathbf{q} и π были вычислены С. И. Брагинским, так что уравнения (7.26) могут быть получены как следствие приведенной в его работе системы гидродинамических уравнений.

Из сравнения (7.56) с (7.26) видно, что часть членов в операторах $d_a(n, V_z, T)/dt$ взаимно сокращается с другими слагаемыми гидродинамических уравнений;

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_{\perp} \nabla n + n \operatorname{div} \mathbf{V}_{\perp} &= \mathbf{V}_E \nabla n; \\ \mathbf{V}_{\perp} \nabla V_z + \frac{(\nabla \pi)_z}{mn} &= \mathbf{V}_E \nabla V_z; \\ \frac{3}{2} n \mathbf{V}_{\perp} \nabla T + p \operatorname{div} \mathbf{V}_{\perp} + \operatorname{div} \mathbf{q} &= \frac{3}{2} n \mathbf{V}_E \nabla T. \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

Такое сокращение членов свидетельствует о том, что в интересующем нас круге явлений (см. § 7.2) физический смысл имеет не полная скорость \mathbf{V} , а лишь ее часть $\mathbf{V}_{\text{эф}}$, не содержащая члена с градиентом давления (т. е. члена с ларморовским обтеканием, см. § 4.6):

$$\mathbf{V}_{\text{эф}} = \mathbf{e}_z V_z + \mathbf{V}_E. \quad (7.58)$$

2. Уравнения порядка ϵ^2 . Члены порядка ϵ^2 в уравнениях § 7.2 учитывают диссипативные эффекты, такие, как продольная теплопроводность, столкновительная часть поперечной теплопроводности, столкновительная вязкость. В схеме Чепмена — Энского все эти эффекты определяются поправкой к функции распределения первого и второго порядков. При учете членов только первого порядка получается, в частности:

$$\pi_{zz} = -\eta_0 \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V}_{\perp} \right). \quad (7.59)$$

Это выражение отличается от найденного в § 7.2. Если же в схеме Чепмена — Энского учесть добавку к функции распределения второго порядка, то получим следующую добавку к (7.59):

$$\pi_{zz}^{(2)} = \frac{2}{3} \eta_0 \frac{1}{mn\omega_B} [\nabla T, \nabla n]_z. \quad (7.60)$$

Суммируя (7.59) и (7.60) и учитывая, что, согласно (7.53),

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_{\perp} = -\frac{1}{mn\omega_B} [\nabla T, \nabla n]_z, \quad (7.61)$$

приходим к выражению для π_{zz} , полученному в § 7.2.

Отметим, что в принятом в § 7.2 приближении однородного магнитного и потенциального электрического полей для правильного описания методом Чепмена — Энского всех остальных эффектов (кроме вязкости) по-

рядка ϵ^2 достаточно вычисления только поправки первого порядка.

3. Уравнения порядка ϵ^3 . Приближение ϵ^3 соответствует учету в ионном уравнении (7.52) поперечной инерции (левой части равенства) и «бесстолкновительной» части тензора вязкости. При учете этих малых членов поперечную часть уравнения (7.52) можно представить в виде

$$\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \mathbf{V}_\perp^{(3)}, \quad (7.62)$$

где $\mathbf{V}_\perp^{(1)}$ определено соотношением (7.53), а

$$\mathbf{V}_\perp^{(3)} = \frac{1}{\omega_B} \left[\mathbf{e}_z, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + \frac{(\nabla \pi)_\perp}{mn} \right] \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_\perp^{(1)}}. \quad (7.63)$$

Тензор π определяется функцией распределения $\tilde{f}_2^{(2)}$ [см. (7.29)], содержащей двойные осцилляции по α ($\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$), и функцией $\tilde{f}^{(2)}$, не зависящей от α [последняя определяется уравнением (7.30) и при $V_z \rightarrow 0$ зависит от градиента температуры], так что

$$\pi = \pi \{ \tilde{f}_2^{(2)} \} + \pi \{ \tilde{f}^{(2)} \}. \quad (7.64)$$

Для наших целей нужно не само значение $\mathbf{V}_\perp^{(3)}$, а вклад этой величины в уравнение непрерывности, т.е. выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)} n}{\partial t} &= -\operatorname{div} (n \mathbf{V}^{(3)}) = \\ &= \frac{1}{\omega_B} \operatorname{rot}_z \left\{ n \left(\frac{\partial \mathbf{V}^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + \frac{(\nabla \pi)_\perp}{mn} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Оказывается, что

$$\operatorname{rot}_z (\nabla \pi \{ \tilde{f}^{(2)} \})_\perp = 0, \quad (7.66)$$

поэтому часть тензора вязкости, связанную с $\tilde{f}^{(2)}$, вычис-

лять не надо. Часть тензора π , связанная с $\tilde{f}_2^{(2)}$, может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xx} = -\pi_{yy} &= -\frac{\rho}{2\omega_B} \left(\frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial V_y^{(1)}}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{5\omega_B} \left(\frac{\partial q_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q_y^{(1)}}{\partial x} \right); \\ \pi_{xy} = \pi_{yx} &= \frac{\rho}{2\omega_B} \left(\frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial V_y^{(1)}}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{5\omega_B} \left(\frac{\partial q_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial q_y^{(1)}}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

Методом Чепмена — Энского в первом приближении получается только часть тензора π , зависящая от производных скорости. Производные от потока тепла существенны, если $\nabla T \neq 0$.

4. Уравнения порядка ϵ^4 . В этом приближении учитывается поперечная столкновительная вязкость ионов. Этот эффект мы рассмотрели в предположении $\nabla T = 0$, а при этом $\mathbf{q} = 0$ и вязкость определяется только производными скорости [ср. с (7.67)]. Производные скорости учитываются в первом приближении метода Чепмена — Энского. Выраженное через тензор столкновительной вязкости, уравнение (7.38) имеет вид

$$\frac{\partial^{(3)} n}{\partial t} = \frac{1}{\omega_B} \operatorname{rot}_z (\nabla \pi^{st}), \quad (7.68)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xx}^{st} = -\pi_{yy}^{st} &= -\eta_1 \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right); \\ \pi_{xy}^{st} = \pi_{yx}^{st} &= -\eta_1 \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.69)$$

При $\nabla T \neq 0$ в правые части (7.69) входили бы также производные от теплового потока \mathbf{q} .

5. Сравнение с другими методами. Предположения о порядках величин, принятые в § 7.2 и 7.3, не совпа-

дают с предположениями, лежащими в основе метода Чепмена — Энскога. Дело в том, что в этом методе временное и пространственное изменения макроскопических параметров учитываются в одном и том же порядке:

$$\partial/\partial t \sim \partial/\partial x, \quad (7.70)$$

тогда как, согласно (7.19), в случае интересующих нас градиентных явлений

$$\partial/\partial t \sim (\partial/\partial x)^2. \quad (7.71)$$

Скорость поперечного движения плазмы в процессах с частотой (7.19) является, согласно (7.53), малой величиной, а в методе Чепмена — Энскога она полагается величиной нулевого порядка. Старшие члены в потоке тепла и тензоре вязкости в методе § 7.3 полагаются того же порядка, что и поперечная скорость, а в методе Чепмена — Энскога q и π считаются малыми.

Если принять, что V_{\perp} нулевого порядка, то результаты § 7.2 и 7.3 можно получить двумя путями:

1) в методе Чепмена — Энскога надо учесть поправки второго порядка;

2) считать, что помимо n , V , T величинами нулевого порядка являются также q и π . Такой подход развивался, в частности, Херданом и Дили и Е. Я. Коганом, С. С. Моисеевым и В. Н. Ораевским (см. также приложение 1 к гл. 16).

§ 7.5. Дисперсионные уравнения в пренебрежении малыми диссипативными эффектами

Здесь и в следующем параграфе содержится сводка дисперсионных уравнений, вытекающих в различных предельных случаях из макроскопических уравнений § 7.2 и 7.3. При выводе этих уравнений пренебрежем равновесным электрическим полем, $E_{\perp 0} = 0$, $E_{z0} = 0$, и равновесным движением компонент плазмы вдоль магнитного поля, $V_{z0}^{(e)} = V_{z0}^{(i)} = 0$, и положим $T_{0e} = T_{0i} = T_0$. В этом параграфе пренебрежем также малыми диссипативными эффектами порядка $(k_z v_{Ti})^2 / \omega v_{ii}$,

$(k\rho_i)^2$, $(k\rho_i)^2 v_{ii} / \omega$. Дисперсионные уравнения с учетом этих эффектов приводятся в § 7.6.

При указанных предположениях из системы уравнений (7.34), в которой ионное уравнение непрерывности заменено (7.44), с учетом условия квазинейтральности $n_e' = n_i' = n'$ вытекает:

$$\left. \begin{aligned} & -i\omega n' + \mathbf{V}_E \nabla n_0 + ik_z V_z^{(e)} n_0 = 0; \\ & -i\omega n' + \mathbf{V}_E \nabla n_0 + ik_z V_z^{(i)} n_0 - \frac{ik_z^2 e_i n_0}{m_i \omega_{Bi}^2} (\omega - \omega_{pi}^*) \psi = \\ & \quad = 0; \\ & 0 = e_e n_0 E_z - ik_z T_0 n' - 1,71 ik_z n_0 T_e' - \\ & \quad - v_{ei} n_0 m_e (V_z^{(e)} - V_z^{(i)}); \\ & -i\omega n_0 m_i V_z^{(i)} = -ik_z (p_i' + p_e'); \\ & -\frac{3}{2} i\omega n_0 T_e' + \frac{3}{2} n_0 \mathbf{V}_E \nabla T_0 + ik_z p_0 V_z^{(e)} = \\ & \quad = -3,16 \frac{k_z^2 p_0}{m_e} \tau_e T_e' - \frac{3}{2} v_{ie} n_0 (T_e' - T_i'); \\ & -\frac{3}{2} i\omega n_0 T_i' + \frac{3}{2} n_0 \mathbf{V}_E \nabla T_0 + ik_z p_0 V_z^{(i)} = \frac{3}{2} v_{ie} n_0 \times \\ & \quad \times (T_e' - T_i'). \end{aligned} \right\} (7.72)$$

Здесь $v_{ei} \equiv 0,51/\tau_e$, $v_{ie} \equiv \frac{2}{3} m_e/m \tau_e$. В уравнении движе-

ния электронов пренебрежено инерцией последних, малой как ω/v_{ei} . Уравнение движения ионов записано с учетом соответствующего электронного уравнения. Величины $V_z^{(e)}$, $V_z^{(i)}$ означают возмущения продольных скоростей электронов и ионов; $\omega_{pi}^* = (ck_y/e_i B_0 n_0) \partial p_{oi} / \partial x$.

Последний член левой части ионного уравнения непрерывности, полученный в приближении ϵ^3 , мал по сравнению с первыми как $z_i \equiv (k_{\perp} \rho_i)^2$. Видно, однако, что если k_z достаточно мало, то сумма первых двух членов указанного уравнения равна нулю. Это является следствием электронного уравнения непрерывности. В этих условиях члены порядка ϵ^3 оказываются главными.

Формально большие члены второго уравнения (7.72) можно исключить, вычитая из него первое уравнение. При этом

$$k_z (V_z^{(i)} - V_z^{(e)}) - z_i (\omega - \omega_{pi}^*) e_i \psi / T_0 = 0. \quad (7.73)$$

Теперь относительную роль членов порядка ϵ^3 можно оценить, исключив из (7.73) разность $V_z^{(i)} - V_z^{(e)}$ с помощью третьего уравнения (7.72):

$$-i (k_z^2 T_0 / m_e v_{ei}) (e_e \psi + n' T_0 / n_0 + 1,71 T_e') + e_i z_i (\omega - \omega_{pi}^*) \psi = 0. \quad (7.74)$$

Видно, что члены порядка ϵ^3 (поперечная инерция ионов и их поперечная магнитная вязкость) важны при

$$\omega_s \lesssim \omega^*, \quad (7.75)$$

где $\omega^* = \max(\omega_n, \omega_T, \omega_p)$;

$$\omega_s \equiv k_z^2 T_0 / m_e v_{ei} z_i. \quad (7.76)$$

1. **Возмущения с малым k_z , $\omega_s \lesssim \omega^*$.** Рассмотрим теперь, какие упрощения можно сделать в системе (7.72) при условии (7.75). Из первых двух уравнений (7.72) приближенно следует

$$n' = - (k_y e \psi / m \omega \omega_B) \partial n_0 / \partial x. \quad (7.77)$$

Из последних трех

$$T_e' = - (k_y e \psi / m \omega \omega_B) \partial T_0 / \partial x. \quad (7.78)$$

В результате из (7.74), (7.77), (7.78) вытекает дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} + i \frac{\omega_s}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} - 1,71 \frac{\omega_{Te}}{\omega} \right) = 0. \quad (7.79)$$

Это столкновительный аналог уравнения (6.2).

2. **Возмущения с большими $\cos \theta$, $\omega_s \gg \omega^*$.** Уравнение (7.78) в этом случае означает

$$V_z^{(e)} = V_z^{(i)} \equiv V_z. \quad (7.80)$$

Вместо (7.74) теперь имеем

$$e_e \psi + n' T_0 / n_0 + 1,71 T_e' = 0. \quad (7.81)$$

Выражение для V_z находим из уравнения движения ионов

$$V_z = k_z (p_e' + p_i') / m_i n_0 \omega. \quad (7.82)$$

Подставляя (7.82) в первое уравнение (7.72), получаем

$$-i \omega n' - i (e \psi k_y / m \omega_B) \partial n_0 / \partial x + i k_z^2 (p_e' + p_i') / m_i \omega = 0. \quad (7.83)$$

Видно, что V_z следует учитывать, если

$$k_z \geq \omega^* / v_{Ti}. \quad (7.84)$$

Поэтому можно рассмотреть следующие предельные случаи.

а. Возмущения с $k_z < \omega^* / v_{Ti}$. При этом $V_z = 0$, так что (7.77) остается в силе. Из двух последних уравнений системы (7.72) находим T_e' . При $\omega^* > v_{ie}$

$$T_e' = - (e \psi k_y / m \omega_B) (\partial T_0 / \partial x) (1 + i k_z^2 T_0 \tau_e / 3 c_0 \omega m_e), \quad (7.85)$$

где $c_0 = (2 \cdot 3,16)^{-1}$. Из (7.74), (7.81) и (7.85) следует дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} - 1,71 \frac{\omega_{Te}}{\omega + 2,1 i k_z^2 T_0 \tau_e / m_e} = 0. \quad (7.86)$$

Здесь мнимые члены порядка вещественных при

$$\omega_s \approx \omega^* / z_i. \quad (7.87)$$

б. Возмущения с $k_z \approx \omega^* / v_{Ti}$ в случае $\omega^* > v_{ie}$. В этих условиях электронная теплопроводность велика, так что приближенно можно принять

$$T_e' = 0. \quad (7.88)$$

При этом из (7.72) имеем

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} - \frac{k_z^2 T_0}{m_i \omega^2} \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3} \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \frac{\omega_{Te}}{\omega} \right) = 0. \quad (7.89)$$

в. Возмущения с $k_z \approx \omega^* / v_{Ti}$ в случае $\omega^* < v_{ie}$. Согласно последнему неравенству, в этих условиях существует теплообмен, и потому

$$T_e' = T_i' \equiv T'. \quad (7.90)$$

Последние два уравнения (7.72) сводятся к одному:

$$-i\omega T' + \mathbf{V}_E \nabla T_0 + \frac{2}{3} i k_z T_0 V' = 0, \quad (7.91)$$

а уравнения (7.82) и (7.83) при этом означают

$$\left. \begin{aligned} V' &= 2k_z p' / m_i n_0 \omega; \\ -i\omega n' + \mathbf{V}_E \nabla n_0 + 2i k_z p' / m_i \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.92)$$

Из (7.81), (7.91), (7.92) получается дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} &1 - \frac{\omega_{ne} + 1,71\omega_{Te}}{\omega} - \frac{k_z^2 T_0}{m_i \omega^2} \times \\ &\times \left[\frac{10}{3} - \frac{0,71}{\omega} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \omega_{ne} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.93)$$

В отличие от (7.89) оно описывает возмущения сильно-столкновительной плазмы, $\omega^* < v_{ie}$.

§ 7.6. Дисперсионные уравнения с учетом малых диссипативных эффектов

1. **Учет членов порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2$.** Рассматривая в § 7.5 возмущения с $\omega_s \approx \omega^* / z_i$, мы пренебрегли членами порядка z_i и в результате получили дисперсионное уравнение (7.86). Последнее при $\nabla T_0 = 0$ имеет вещественные решения. Поэтому при нахождении инкремента возмущений плазмы с $\nabla T_0 = 0$ малые члены порядка z_i существенны.

Следуя тем же предположениям, что и при выводе (7.86), но сохраняя члены порядка z_i , вместо (7.80) и (7.82) получаем

$$V_z^{(e)} = - (e_i \psi / k_z T_0) z_i (\omega - \omega_{ni}); \quad (7.94)$$

$$V_z^{(i)} = 0. \quad (7.95)$$

Возмущения плотности и электронной температуры при этом равны ($\nabla T_0 = 0$):

$$n' = - (e \psi k_y / m \omega \omega_B) \partial_{n0} / \partial x - (e_i \psi / T) z_i (1 - \omega_{ni} / \omega); \quad (7.96)$$

$$T_e' = - \frac{2}{3} e_i \psi z_i (1 - \omega_{ni} / \omega) (1 + 2,1 k_z^2 T_0 \tau_e / m_e \omega)^{-1}. \quad (7.97)$$

Подставляя эти выражения в (7.74), приходим к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} &1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) z_i \left(1 - i 0,51 \frac{m_e \omega}{k_z^2 T_0 \tau_e} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} \frac{1,71}{1 + i 2,1 k_z^2 T_0 \tau_e / m_e \omega} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.98)$$

В частности, при $\omega_s \gg \omega^* / z_i$ это можно записать в виде, аналогичном (6.12):

$$(1 + i v_{\text{эф}} \omega / k_z^2 v_{Te}^2) (1 - \omega_{ne} / \omega) + z_i (1 - \omega_{ni} / \omega) = 0, \quad (7.99)$$

где $v_{\text{эф}} = 2(0,51 + 1,71/3,16) / \tau_e$.

Уравнение (7.99) становится несправедливым при $k_z v_{Ti} / \omega^* \approx z_i^{1/2}$. При таких k_z его нужно дополнить членами, обязанными продольной инерции ионов. Тогда вместо (7.99) получим

$$\begin{aligned} &(1 + i v_{\text{эф}} \omega / k_z^2 v_{Te}^2) (1 - \omega_{ne} / \omega) + (z_i - k_z^2 T / m_i \omega^2) \times \\ &\times (1 - \omega_{ni} / \omega) = 0. \end{aligned} \quad (7.100)$$

2. **Учет поперечной столкновительной вязкости.** Члены, соответствующие поперечной столкновительной вязкости, содержатся в уравнениях системы (7.51). Из нее получается следующее обобщение дисперсионного уравнения (7.98):

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} \right) \left(1 - i \frac{0,51 \omega m_e}{k_z^2 T_0 \tau_e} + \frac{2}{3} \frac{1,71}{1 + i 2,1 k_z^2 T_0 \tau_e / m_e \omega} \right)^{-1} + \\ &+ z_i \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \left(1 + 0,3 \frac{iz_i}{\omega \tau_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Добавочные члены существенны, если $z_i > \omega / v_{ii}$.

3. **Учет диссипативных эффектов в возмущениях с $k_z \approx \omega^* / v_{Ti}$.** В этом случае уравнения (7.72) надо дополнить продольной ионной вязкостью и ионной теплопроводностью. С другой стороны, можно пренебречь поперечной инерцией и магнитной вязкостью ионов. В результате дисперсионное уравнение принимает вид

$$D_0 + i(\Delta_1 / \omega_{Te}) a_1 + i(v_{ie} / \omega_{Te}) a_2 = 0, \quad (7.102)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= x^2(x - 1/\eta) + b(8x/3 + 1 - 2/3\eta); \\ a_1 &= (c_1 + 1)(x - 1/\eta)x - 2c_1b; \\ a_2 &= x(x - 1/\eta) - 2b - (c_0x/b)[x^3 - x^2 \times \\ &\times (1 + s + 1/\eta) - (10/3)bx - 2b(1 - 2/3\eta)]; \\ x &= \omega/\omega_T; \quad b = k_z^2 T_0 / m_i \omega_T^2; \quad \omega_T = \omega_{Te}; \\ \Delta_1 &= (4/3) 0,96 k_z^2 T_0 \tau_i / m_i; \\ c_1 &= 3,9/2 \cdot 0,96. \end{aligned} \right\} (7.103)$$

§ 7.7. Использование модельного интеграла столкновений

В § 7.1 рассмотрено приближение слабых столкновений, а в § 7.2—7.6 — сильных. Уравнения колебаний в этих двух предельных случаях получались существенно различными путями. Причина тому — сложность интеграла столкновений (называемого также столкновительным членом кинетического уравнения). Именно поэтому нельзя использовать какой-либо один метод решения кинетического уравнения и построить единообразную картину колебаний столкновительной плазмы.

Если ради единообразия пожертвовать точностью, то задача оказывается разрешимой. Это достигается тем, что точный интеграл столкновений заменяется приближенным. Такой приближенный интеграл столкновений, с одной стороны, должен правильно учитывать основные черты процесса столкновений, а с другой — должен позволять отыскивать решение кинетического уравнения таким же путем, как и в отсутствие столкновений.

В случае плазмы с однородной температурой $\nabla T_{0i} = \nabla T_{0e} = 0$ и нулевым продольным током $V_{0e} = V_0$ этим требованиям удовлетворяет интеграл столкновений вида (модель Батнагара — Гросса — Крука)

$$C_\alpha = - \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} \left\{ f^{(\alpha)} - \left(\frac{n^{(\alpha)}}{n_0} + \frac{m_{\alpha}}{T_\alpha} \mathbf{v} \mathbf{V}^{(\alpha)} \right) f^{(\alpha)} \right\}. \quad (7.104)$$

где $\nu_{\alpha\beta}$ — частота столкновений частиц сорта α с частицами сорта β ; $f^{(\alpha)}$, $n^{(\alpha)}$, $\mathbf{V}^{(\alpha)}$ — возмущения функции распределения, плотности и скорости α -компоненты плазмы.

Столкновительный член вида (7.104) удовлетворяет законам сохранения числа частиц и импульса. Он, однако, не учитывает возмущений температуры и таких эффектов, как теплопроводность. Не учитываются здесь и эффекты, связанные с детальным механизмом кулоновского взаимодействия, такие, как анизотропия силы трения, термосила и увеличение эффективной частоты столкновений в коротковолновых возмущениях (см. § 7.1). Поэтому столкновительный член вида (7.104) может давать качественно правильную картину только в условиях, когда все эти эффекты не важны.

Из предшествующего анализа следует, что такая ситуация имеет место в случае низкочастотных, $\omega \ll \omega_{Bi}$, возмущений плазмы с неоднородной плотностью, $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T_0 = 0$, при не слишком большой частоте ионно-электронных столкновений $\nu_{ie} < \omega^*$ и не слишком больших волновых числах, $k_\perp \rho_i \leq 1$.

Несмотря на эти ограничения, кинетическое уравнение со столкновительным членом вида (7.104) позволяет извлечь более обширную информацию, чем та, которая получается строгими методами в предельных случаях слабых и сильных столкновений. Что касается электронов, то таким путем учитываются их взаимные столкновения и сила трения об ионы при произвольных соотношениях между параметрами (ω , k_z , ν_{Te} , ν_{ee}). Ионное кинетическое уравнение с C_α вида (7.104) учитывает ионную вязкость, во-первых, при произвольных соотношениях между ω и ν_{ii} и, во-вторых, в широком интервале поперечных волновых чисел, вплоть до $k_\perp \rho_i \approx 1$ включительно. Таким путем правильно описывается и трение ионов об электроны, если только k_z не слишком велико и не играет роли термосила.

Стоящая в правой части (7.104) искомая функция распределения не дифференцируется как в случае точного интеграла столкновений, а просто умножается на число. Благодаря этому можно использовать метод интегрирования по траекториям. Для $f^{(\alpha)}$ получается выражение

$$f^{(\alpha)} = - \int_{-\infty}^t dt' \exp[v_{\alpha}(t' - t)] \left\{ \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \Psi \frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v} + \sum_{\beta} v_{\alpha\beta} f_0^{(\alpha)} \left[\frac{n^{(\alpha)}}{n_0} + \frac{m_{\alpha}}{T_{\alpha}} \mathbf{v} \mathbf{V}^{\beta} \right] \right\}. \quad (7.105)$$

Здесь $v_{\alpha} = \sum_{\beta} v_{\alpha\beta}$. Интеграл берется по траекториям, которые имеют такой же вид, как и в отсутствие столкновений (ср. с § 4.7). Он вычисляется так же, как и в § 4.7, и приводится к следующему результату:

$$f^{(\alpha)} = - \frac{ef_0^{(\alpha)}}{T_{\alpha}} \Psi \left\{ 1 - \frac{(\omega + iv_{\alpha} - \omega_{n\alpha}) J_0(\xi) \exp[i\xi \sin(\alpha - \Psi)]}{\omega + iv_{\alpha} - k_z v_z} \right\} + i \sum_{\beta} v_{\alpha\beta} \frac{\exp[i\xi \sin(\alpha - \Psi)]}{\omega + iv_{\alpha} - k_z v_z} \left\{ \left[\frac{n^{(\alpha)}}{n_0} + \frac{m_{\alpha}}{T_{\alpha}} V_{\alpha}^{(\beta)} \right] J_0(\xi) + \frac{m_{\alpha}}{T_{\alpha}} \frac{v_{\perp} J_0'(\xi)}{k_{\perp}} [\mathbf{k}, \mathbf{V}^{\beta}]_z \right\}. \quad (7.106)$$

С помощью (7.106) получаем систему уравнений для $n^{(\alpha)}$, $V_z^{(\alpha)}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{V}^{(\alpha)}]_z$ ($\alpha = i, e$). Ее нетрудно разрешить, если учесть малость параметров v_{ii}/v_{ei} , v_{ie}/v_{ii} . Вычислив плотности зарядов $n^{(\alpha)}$, можно найти диэлектрическую проницаемость $\epsilon_0^{(\alpha)}$ (см. § 4.1) и получить дисперсионное уравнение с учетом столкновений. Приведем некоторые предельные случаи такого дисперсионного уравнения.

При $z_i \ll 1$, $v_e \gg (\omega, k_z v_{Te})$ в пренебрежении малыми членами имеем

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \left(1 - 2i \frac{v_{ei}\omega}{k_z^2 v_{Te}^2} \right) z_i \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) = 0. \quad (7.107)$$

Это качественно совпадает с (7.99). Отметим, что при получении (7.99) как электроны, так и ионы предполагались столкновительными. В действительности же этот результат остается в силе и в случае бесстолкновительных ионов. Это и естественно, поскольку в (7.99) дают вклад только поперечная инерция ионов и попе-

речная магнитная вязкость, т. е. эффекты, не чувствительные к столкновениям.

С помощью (7.106) можно получить обобщение уравнения (7.107) на случай произвольных ω/v_e :

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + z_i \left[1 - i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left(\frac{W(x)}{1 + i \sqrt{\pi} x W(x)} + 2i \frac{x}{\sqrt{\pi}} \right) \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \right] = 0, \quad (7.108)$$

где $x = (\omega + iv_e)/|k_z| v_{Te}$.

При учете малых членов порядка z_i вместо (7.107) получается результат, аналогичный (7.101):

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \left(1 - 2i \frac{v_{ei}\omega}{k_z^2 v_{Te}^2} \right) z_i \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \times \left[1 + z_i \frac{iv_{ii}}{\omega} \left[\frac{9}{4} - \frac{\omega}{\omega + iv_{ii}} \right] \right] = 0. \quad (7.109)$$

Это уравнение учитывает столкновительную вязкость ионов, причем как при $v_{ii} > \omega$, так и при $v_{ii} < \omega$.

В уравнении (7.107) можно было бы учесть также члены, соответствующие продольному движению ионов. Тогда получается, в частности, формула, аналогичная (7.100).

Таким образом, использование модельного интеграла столкновений в обсуждавшемся выше круге задач приводит к качественно правильным результатам.

ПРИЛОЖЕНИЕ к гл. 7

Метод Чепмена—Энскога в приложении к полностью ионизованной плазме в отсутствие магнитного поля

1. Кинетическое уравнение для столкновительной полностью ионизованной плазмы. Функция распределения $f_{\alpha}(t, \mathbf{v}, t)$ частиц сорта α (электронов или ионов) при наличии столкновений удовлетворяет кинетическому уравнению [см. уравнение (1) т. 1].

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f_{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v} = C_{\alpha}. \quad (\text{П.7.1})$$

Столкновения между частицами учитываются правой частью кинетического уравнения, обозначенной символом C_{α} . Частицы каждого сорта (электроны или ионы) сталкиваются между собой, с зарядами другого сорта и с нейтральными атомами. Если преобладают столкновения между заряженными частицами (полностью ионизованная плазма), то

$$C_{\alpha} = \sum_{\beta=e, i} C_{\alpha\beta}; \quad \alpha = e, i, \quad (\text{П.7.2})$$

где выражение для $C_{\alpha\beta}$ имеет вид, впервые полученный Л. Д. Ландау:

$$C_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi\lambda_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_k} \int \left\{ \frac{f_{\alpha}(v)}{m_{\beta}} \frac{\partial f_{\beta}(v')}{\partial v'_l} - \frac{f_{\beta}(v')}{m_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}(v)}{\partial v_l} \right\} U_{kl} dv'. \quad (\text{П.7.3})$$

Здесь

$$U_{kl} = (u^2 \delta_{kl} - u_k u_l) / u^3; \quad u_k = v_k - v'_k; \quad (\text{П.7.4})$$

λ — кулоновский логарифм (λ — слабая функция температуры и плотности плазмы; для оценок можно принять $\lambda \approx 10$). Практически всегда электронные скорости велики по сравнению с ионными. (В противном случае энергия ионов должна была бы превышать энергию электронов по крайней мере в m_i/m_e раз.) При малом v_i/v_e перекрестные интегралы столкновений C_{ei} , C_{ie} могут быть упрощены.

2. Упрощение C_{ei} . Разлагаем функцию $U_{\alpha\beta}(v-v')$ в ряд по степеням скорости ионов v' . С точностью до квадратичных членов по v' получаем

$$U_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} - v'_\gamma \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} + \frac{v'_\gamma v'_\delta}{2} \frac{\partial^2 V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma \partial v_\delta}, \quad (\text{П.7.5})$$

где $V_{\alpha\beta} = (v^2 \delta_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta) / v^3$. С учетом (П.7.5) из (П.7.3) получаем искомым результат:

$$C_{ei} = \frac{2\pi\lambda_e^2 e_i^2 n_i}{m_e} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left\{ V_{\alpha\beta} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} - V_\gamma^{(i)} \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} - \mu f_e \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\beta} + \mu f_e V_\gamma^{(i)} \frac{\partial^2 V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma \partial v_\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma \partial v_\delta} (V_\gamma^{(i)} V_\delta^{(i)} + T_i \delta_{\gamma\delta} / m_i + \pi_{\alpha\beta}^{(i)} / m_i n_i) \right\}. \quad (\text{П.7.6})$$

Здесь $n_i = \int f_i dv$, $V^{(i)} = \int v f_i dv / n_i$ — плотность и средняя направленная скорость ионов; $\mu = m_e / m_i$;

$$T_i = (m_i / 3) \int (v - V^{(i)})^2 f_i dv / n_i; \quad (\text{П.7.7})$$

T_i имеет смысл температуры ионов (T_i совпадает с истинной температурой при максвелловском распределении $f_i(v - V^{(i)})$);

$$\pi_{\alpha\beta}^{(i)} = m_i \int f_i \{ (v - V^{(i)})_\alpha (v - V^{(i)})_\beta - (\delta_{\alpha\beta} / 3) (v - V^{(i)})^2 \} dv; \quad (\text{П.7.8})$$

$\pi_{\alpha\beta}^{(i)}$ — тензор вязкости ионов.

3. Упрощение C_{ie} . Малым параметром в этом случае является отношение $|v|/|v'|$. Вместо (П.7.5) теперь получаем ряд

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha\beta} &= V_{\alpha\beta} - v_\gamma \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} + \dots; \\ V_{\alpha\beta} &= \{ (v')^2 \delta_{\alpha\beta} - v'_\alpha v'_\beta \} / (v')^3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.7.9})$$

Подставляя этот результат в (П.7.4), получаем искомое выражение для

$$C_{ie} = \mu R^{(e)} \frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{2\pi\lambda_e^2 e_e^2}{m_i m_e} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left\{ (v_\gamma - v_\gamma^{(i)}) f_i \times \right. \\ \left. \times \int \frac{\partial f_e(v')}{\partial v'_\beta} \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v'_\gamma} dv' + \mu \frac{\partial f_i}{\partial v_\beta} \int f_e(v') V_{\alpha\beta} dv' \right\}. \quad (\text{П.7.10})$$

Здесь

$$R_\alpha^{(e)} = -\frac{2\pi\lambda_e^2 e_i^2 n_i}{m_e^2} \int \left\{ V_{\alpha\beta} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} - V_\gamma^{(i)} \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} \right\} dv. \quad (\text{П.7.11})$$

С помощью (П.7.6) можно убедиться, что $R_\alpha^{(e)}$ — это сила трения, действующая на электроны со стороны ионов, по определению равная

$$R_\alpha^{(e)} = m_e \int v_\alpha C_{ei} dv. \quad (\text{П.7.12})$$

Как и из общих выражений (П.7.3) для C_{ei} , C_{ie} , из (П.7.6) и (П.7.10) следует естественный результат о том, что при столкновении остается неизменным полный импульс электронов и ионов:

$$R_\alpha^{(i)} \equiv m_i \int v_\alpha C_{ie} dv = -R_\alpha^{(e)}. \quad (\text{П.7.13})$$

Неизменной остается и полная энергия сталкивающихся частиц:

$$W_{ei} \equiv \int (m_e v^2 / 2) C_{ei} dv = -W_{ie} = -\int (m_i v'^2 / 2) C_{ie} dv. \quad (\text{П.7.14})$$

Согласно (П.7.6), энергия W_{ei} , получаемая электронами в единицу времени от ионов, равна

$$W_{ei} = \mathbf{V}^{(e)} \mathbf{R}^{(e)} \div Q_{ei}, \quad (\text{П.7.15})$$

где $\mathbf{V}_e = \int \mathbf{v} f_e d\mathbf{v} / n_e$ — средняя скорость электронов;

$$Q_{ei} = \mathbf{R}^{(e)} (\mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{V}^{(e)}) - Q_{ie}; \quad (\text{П.7.16})$$

$$Q_{ie} = \frac{2\pi\lambda e_e^2 e_i^2 n_i}{m_i} 2 \int \left\{ \frac{f_e}{v} + \frac{T_i}{m_e} \frac{v_\beta}{v^3} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} - \frac{\pi_{\alpha\beta}^{(i)}}{2m_e n_i} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} \frac{\partial V_{\beta\gamma}}{\partial v_\beta} \right\} d\mathbf{v}. \quad (\text{П.7.17})$$

Величины Q_{ei} , Q_{ie} означают приращение в единицу времени хаотической энергии электронов или ионов при взаимных столкновениях:

$$\left. \begin{aligned} Q_{ei} &= \int (m_e/2) (\mathbf{v} - \mathbf{V}^{(e)})^2 C_{ei} d\mathbf{v}; \\ Q_{ie} &= \int (m_i/2) (\mathbf{v} - \mathbf{V}^{(i)})^2 C_{ie} d\mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.7.18})$$

4. Гидродинамика полностью ионизованной столкновительной плазмы. Для исследования процессов с частотами, малыми по сравнению с частотой парных столкновений, необходимо прежде всего решить кинетическое уравнение в приближении частых столкновений. Сделаем это, следуя С. И. Брагинскому. Поскольку нашей целью является лишь иллюстрация метода решения, то наше магнитное поле полагается равным нулю.

Вводим в уравнении (П.7.1) вместо скорости \mathbf{v} новую переменную $\mathbf{v}^{(\alpha)}$, полагая

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\alpha)} + \mathbf{V}^{(\alpha)}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{П.7.19})$$

Здесь $\mathbf{V}^{(\alpha)}$ — определенная выше средняя скорость соответствующей компоненты плазмы. В результате этой замены переменных уравнение (П.7.1) приводится к виду

$$\widehat{L}^{(\alpha)} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^{(\alpha)}, t) = \sum_\beta C_{\alpha\beta}, \quad (\text{П.7.20})$$

где

$$\widehat{L}^{(\alpha)} = \frac{d_\alpha}{dt} + \mathbf{v}^{(\alpha)} \nabla + \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} - \frac{d_\alpha \mathbf{V}^{(\alpha)}}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^{(\alpha)}} - \frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial v_\beta^{(\alpha)}}; \quad \frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^{(\alpha)} \nabla. \quad (\text{П.7.21})$$

Зависимость величины $C_{\alpha\alpha}$ от переменной $\mathbf{V}^{(\alpha)}$ такая же, как от \mathbf{v} [см. уравнение (П.7.3)]. В электронно-ионном интеграле столкновений C_{ei} [см. уравнение (П. 7.6)] помимо добавления к \mathbf{v} электронного индекса следует также сделать замену $\mathbf{V}^{(i)} \rightarrow \mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{V}^{(e)}$. Аналогичная замена должна быть сделана и во входящем в C_{ie} выражении $\mathbf{R}^{(e)}$ [см. уравнения (П.7.10), (П.7.11)].

Указанные преобразования перекрестных интегралов столкновений законны, если разность $\mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{V}^{(e)}$ мала по сравнению с $\mathbf{v}^{(e)}$.

Приближение частых столкновений означает, что главные члены правой части (П.7.20) велики по сравнению с левой. В пренебрежении левой частью (П.7.20) и малыми слагаемыми в $C_{\alpha\alpha}$ имеем

$$C_{ee} = C_{ei}^{(0)} = 0; \quad C_{ii} = 0. \quad (\text{П.7.22})$$

Здесь $C_{ei}^{(0)}$ — старший член правой части (П.7.6), записанный в переменных $\mathbf{v}^{(e)}$.

Решением (П.7.22) являются максвелловские функции, так что в пределе частых столкновений

$$f_\alpha = n_\alpha (m_\alpha / 2\pi T_\alpha)^{3/2} \exp(-m_\alpha \mathbf{v}^{(\alpha)2} / 2T_\alpha) \equiv F_\alpha. \quad (\text{П.7.23})$$

Введенные здесь плотность n_α и температура T_α и ранее введенная средняя скорость $\mathbf{V}^{(\alpha)}$ связаны между собой и другими моментами функции распределения соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div}(n_\alpha \mathbf{V}^{(\alpha)}) &= 0; \\ m_\alpha n_\alpha \frac{d_\alpha V_k^{(\alpha)}}{dt} &= - \frac{\partial p_\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial \pi_{kl}^{(\alpha)}}{\partial x_l} + e_\alpha n_\alpha E_k + R_k^{(\alpha)}; \\ (3/2) n_\alpha \frac{d_\alpha T_\alpha}{dt} + p_\alpha \text{div} \mathbf{V}^{(\alpha)} &= - \text{div} \mathbf{q}^{(\alpha)} - \\ &= \pi_{kl}^{(\alpha)} \frac{\partial V_k^{(\alpha)}}{\partial x_l} \div Q_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.7.24})$$

Эти результаты получаются интегрированием (П.7.1) по скоростям.

Чтобы найти π_{kl} , \mathbf{q} , \mathbf{R} и Q , необходимо вычислить добавку к (П.7.23), обусловленную слагаемыми кинетического уравнения (П.7.1), отброшенными в (П.7.22). Полагаем

$$f_\alpha = F_\alpha + f_\alpha^{(1)}. \quad (\text{П.7.25})$$

Уравнения для $f_e^{(1)}$, $f_i^{(1)}$ имеют соответствующий вид:

$$\left. \begin{aligned} C_{ee} [f_e^{(1)}, F_e] + C_{ei}^{(0)} (f_e^{(1)}) &= \widehat{L}^{(e)} F_e - C_{ei}^{(1)} (F_e); \\ C_{ii} [f_i^{(1)}, F_i] &= \widehat{L}^{(i)} F_i - C_{ie} (F_i). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.7.26})$$

Производные d_α/dt , входящие в оператор $\widehat{L}^{(\alpha)}$, заменяем через производные по координатам, используя уравнения (П.7.24). В последних полагаем π_{kl} и \mathbf{q} равными нулю; эти величины определяются функцией $f_\alpha^{(1)}$, и поэтому их вклад в правую часть (П.7.26) мал.

В результате уравнения (П.7.26) сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} C_{ee} [f_e^{(1)}, F_e] + C_{ei}^{(0)} (f_e^{(1)}) \mathbf{v} F_e \left\{ \left(\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T_e + \right. \\ \left. + \frac{m_e}{T_e \tau_e} \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} v^3} \left(\frac{T_e}{m_e} \right)^{3/2} - 1 \right] \left(\mathbf{v}^{(e)} - \mathbf{v}^{(i)} + \frac{\mathbf{R}_1^{(e)}}{n_e T_e} \right) \right\}; \\ C_{ii} (f_i^{(1)}, F_i) - F_i \left[\left(\frac{m_i v^2}{2T_i} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \nabla \ln T_i + \right. \\ \left. + \frac{m_i}{T_i} \left(v_k v_l - \frac{v^2}{3} \delta_{kl} \right) W_{kl}^{(i)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.7.27})$$

Для краткости здесь опущен индекс α у скорости $\mathbf{V}^{(\alpha)}$. Величины $\mathbf{R}_1^{(e)}$ и $W_{kl}^{(i)}$ означают:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_1^{(e)} = \int m_e \mathbf{v}^{(e)} C_{ee}^{(0)} (f_e^{(1)}) d\mathbf{v}^{(e)}; \\ W_{kl} = \frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \vec{V}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.7.28})$$

В электронном уравнении (П.7.22) член W_{kl} опущен; это соответствует пренебрежению электронной вязкостью.

Уравнения (П.7.27) решены в работе С. И. Брагинского. Там же вычислены искомые величины $\mathbf{R}^{(e)} = -\mathbf{R}^{(i)}$, Q_α , $\mathbf{q}^{(\alpha)}$ и $\pi_{kl}^{(i)}$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}^{(e)} = -0,51 \frac{m_e n_e}{\tau_e} (\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{V}^{(i)}) - 0,71 n_e \nabla T_e; \\ \mathbf{q}^{(e)} = 0,71 n_e T_e (\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{V}^{(i)}) - \chi^{(e)} \nabla T_e; \\ \mathbf{q}^{(i)} = -\chi^{(i)} \nabla T_i; \quad Q_e = -\mathbf{R}^{(e)} (\mathbf{V}^{(e)} - \mathbf{V}^{(i)}) - Q_i; \\ Q_i = 3\mu \frac{n_e}{\tau_e} (T_e - T_i); \quad \pi_{kl}^{(i)} = -\eta^{(i)} W_{kl}^{(i)}; \\ \chi^{(e)} = 3,16 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}; \quad \chi^{(i)} = 3,9 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i}; \\ \eta^{(i)} = 0,96 n_i T_i \tau_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.7.29})$$

Библиографический обзор к гл. 7

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
Излагается путь решения уравнения Больцмана и вывод уравнений переноса, называемый методом Чепмена — Энского.

2. Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 33, с. 459.
Методом Чепмена — Энского получены уравнения переноса плазмы в магнитном поле при произвольном отношении v/ω_e . Рассмотрен случай сильного магнитного поля. Основные результаты этой работы приведены в обзоре С. И. Брагинского. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М. Госатомиздат, 1963, с. 183.

3. Kaufman A. N. Plasma Transport Theory. — In: «La théorie des gaz neutres et ionisés», Hermann, Paris, 1960.
С использованием разложения по $1/B$ получены уравнения переноса плазмы. Результаты Кауфмана качественно совпадают с результатами С. И. Брагинского.

4. Михайловский А. Б. О макроскопическом описании столкновительной плазмы в сильном магнитном поле в задачах об устойчивости. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 945.
Получены уравнения для медленных процессов в столкновительной плазме нулевого давления. Основные результаты этой работы изложены в § 7.2—7.4.

5. Herdan R., Lilley B. S. Dynamical equations and transport relationships for a thermal plasma. — «Rev. Mod. Phys.», 1960, v. 32, p. 731.
Получены уравнения переноса, учитывающие производные от потоков.

6. Коган Е. Я., Моисеев С. С., Ораевский В. Н. Гидродинамические модели в применении к исследованию устойчивости замагниченной плазмы. — «Прикл. мех. и техн. физ.», 1965, т. 6, с. 41.
Введены уравнения с производными от потоков для случая бесстолкновительной плазмы.

7. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. Model for collision process in gases. 1. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. — «Phys. Rev.», 1954, v. 94, p. 511.
Предложено в задачах о колебаниях плазмы использовать кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений, модель Батнагара — Гросса — Крука, § 7.7.

8. Питаевский Л. П. Влияние столкновений на возмущения вокруг движущегося в плазме тела. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 969.
Отмечен эффект увеличения частоты столкновений в коротковолновых возмущениях, § 7.1.

9. Рухадзе А. А., Силин В. П. Влияние кулоновских столкновений на дрейфовую неустойчивость плазмы. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 66, с. 70.
Получены столкновительные добавки к диэлектрической проницаемости почти бесстолкновительной плазмы, § 7.1.

10. Михайловский А. Б., Погуце О. П. Кинетическая теория колебаний неоднородной плазмы со столкновениями. — «Журн. техн. физ.» 1966, т. 36, с. 205.
Приведены выражения для диэлектрической проницаемости, получающиеся при использовании модели Батнагара — Гросса — Крука, § 7.7.

Глава 8
НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ
ПЛАЗМЫ

§ 8.1. Неустойчивости почти
бесстолкновительной плазмы

1. **Инерционно-диссипативная неустойчивость** плазмы с $\nabla T=0$. Длинноволновые неустойчивости бесстолкновительной плазмы с $\nabla T=0$ представлены на рис. 6.1. Из этого рисунка видно, что имеется интервал волновых чисел k_z , при которых не развиваются ни гидродинамическая, ни кинетическая неустойчивости. Рассмотрим влияние слабых столкновений на возмущения с k_z , лежащими в указанном интервале.

Используя (7.1), получаем следующее дисперсионное уравнение, заменяющее (6.2):

$$1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} - \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}\right) \left(1 - i \frac{v_{ei}}{\omega}\right) = 0. \quad (8.1)$$

Вытекающие отсюда результаты представлены на рис. 8.1. Здесь же указана кинетическая неустойчивость.

Из сравнения рис. 8.1 с рис. 6.1 видно, что в области между гидродинамической и кинетической неустойчивостями развивается обязанная столкновениям электронов с ионами инерционно-диссипативная неустойчивость.

Вблизи границы гидродинамической неустойчивости

$$\gamma_{\text{дис}} \approx v_{ei}. \quad (8.2)$$

С ростом k_z инкремент инерционно-диссипативной неустойчивости убывает по закону

$$\gamma_{\text{дис}} = 2 \frac{m_e}{m_i \cos^2 \theta} v_{ei} \left(\frac{\omega_{ne}}{\omega_{Bi}}\right)^2. \quad (8.3)$$

Из сравнения (8.2) с (6.13), следует, что $\gamma_{\text{дис}} > \gamma_{\text{кин}}$ при

$$v_{ei}/\omega_{ne} > z_i. \quad (8.4)$$

2. **Раскачка возмущений с $k_z=0$, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ в плазме с $\eta \equiv \partial \ln T / \partial \ln n < 0$.** В пренебрежении столкновениями такие возмущения не раскачиваются (см. § 6.2). При учете столкновений [см. уравнение (7.1)] имеем

$$\text{Re } \omega = \omega_{pe}^*; \quad \gamma = - (3/10) v_{ii} z_i \eta / (1 + \eta). \quad (8.5)$$

Видно, что столкновения вызывают неустойчивость, если

$$-1 < \eta < 0. \quad (8.6)$$

При $k_{\perp} \rho_i \approx 1$ инкремент возмущений порядка $\gamma \approx v_{ii}$.

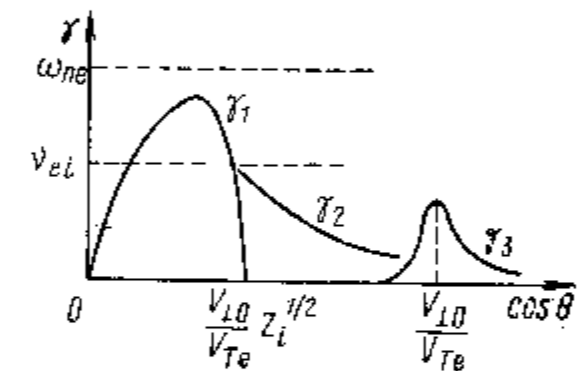


Рис. 8.1. Неустойчивости плазмы с $v_{ei} < \omega_{ne}$, $z_i < 1$, $\nabla T=0$ (γ_1 — инкремент гидродинамической неустойчивости; γ_2 — диссипативной; γ_3 — кинетической; $V_{L0} \approx v_{Ti} \rho_i(a)$)

3. **Подавление ионно-ионными столкновениями коротковолновой кинетической неустойчивости плазмы с $\nabla T=0$.** При учете ионно-ионных столкновений [см. уравнение (7.10)] вместо дисперсионного уравнения (6.18) имеем

$$2 - \frac{\omega_{ne}}{\omega \sqrt{2\pi} z_i} \left(1 + \frac{3(\pi+1)}{2\sqrt{2}} i \frac{v_{ii}}{\omega} z_i\right) - \frac{i \sqrt{\pi} \omega_{ne}}{|k_z| v_{Te}} = 0. \quad (8.7)$$

Считая инкремент малым, находим

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= \omega_{ne} / 2 \sqrt{2\pi} z_i; \\ \gamma &= \frac{\sqrt{\pi} (\omega_{ne})^2}{2 |k_z| v_{Te} \sqrt{2\pi} z_i} - \frac{3(\pi+1)}{\sqrt{2}} v_{ii} z_i. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Видно, что ионно-ионные столкновения приводят к затуханию колебаний и подавлению кинетической неустойчивости, обсуждавшейся в § 6.1.

§ 8.2. Столкновительная плазма с неоднородной плотностью

1. **Инерционно-диссипативная неустойчивость.** Пусть градиент температуры отсутствует, $\nabla T = 0$, и неоднородна только плотность, $\nabla n_0 \neq 0$, и пусть частота столкновений не чрезмерно велика, так что $\omega^* > v_{ie}$. В этом случае из полученных в § 7.5 дисперсионных уравнений только (7.78) описывает возмущения с $\gamma > 0$. Максимальный инкремент этих возмущений порядка

$$\gamma_{\max} \approx \omega^*. \quad (8.9)$$

Он достигается при

$$\omega_s \approx \omega^*. \quad (8.10)$$

С ростом отношения ω_s/ω^* инкремент уменьшается, а при $\omega_s \ll \omega^*$ решение (7.79) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &= \omega_{ne} \\ \gamma &\approx \omega_{ne}^2/\omega_s \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Уравнение (7.79) справедливо только при $\omega_{ne}/\omega_s \ll z_i$. В противном случае возмущения рассматриваемой вставки описываются уравнением (7.98). Из последнего находим, что результат (8.11) качественно остается в силе и при $\omega_{ne}/\omega_s > z_i$, вплоть до таких k_z , когда начинает играть роль продольная инерция ионов. При этом уравнение (7.98) заменяется уравнением (7.100). Из последнего находим границу неустойчивости

$$k_z/k_{\perp} < \kappa k_{\perp} \rho_i^2, \quad (8.12)$$

что совпадает с границей кинетической неустойчивости бесстолкновительной плазмы [ср. с уравнением (6.14)].

Проведенное выше рассмотрение относится к возмущениям с достаточно малыми $k_{\perp} \rho_i$, $z_i < \omega/v_{ii}$. В противном случае надо учитывать поперечную столкновительную вязкость ионов. Из уравнения (7.101) находим, что вязкость играет стабилизирующую роль.

2. **Термосильная неустойчивость.** Полагая, как и выше, $\omega^* > v_{ie}$, рассмотрим возмущения с $\omega \leq v_{ie}$. С по-

мощью (7.103) для таких возмущений получаем дисперсионное уравнение

$$\omega \left(\omega + 4i \frac{m_e}{m_i \tau_e} \right) \left(\omega + i 3,16 k_z^2 \frac{T}{m_e} \tau_e \right) + \frac{8}{3} 0,71 \frac{k_z^2 T}{m_i} \left(\omega + 4i \frac{m_e}{m_i \tau_e} - i \frac{3,16}{2} \frac{k_z^2 T}{m_e} \tau_e \right) = 0. \quad (8.13)$$

При $k_z v_{Ti} \approx v_{ie}$ отсюда приблизительно следует:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &\approx 0; \\ \gamma &\approx 0,71 v_{ie} \left(1 - \frac{3,16}{4} k_z^2 T \frac{m_i}{m_e^2} \tau_e^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Неустойчивость имеет место при

$$k_z v_{Ti} \leq v_{ie}. \quad (8.15)$$

По порядку величины

$$\gamma \approx v_{ie}. \quad (8.16)$$

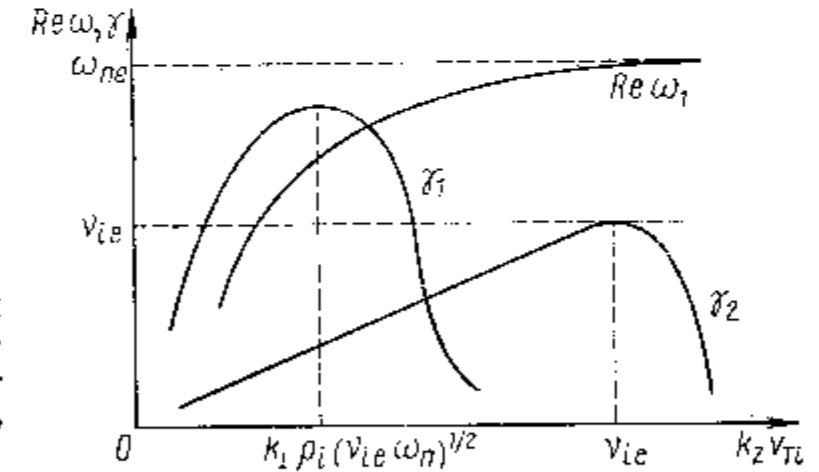


Рис. 8.2. Соответствие между инерционно-диссипативной (индекс 1) и термосильной (индекс 2) неустойчивостями плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, $\omega_n > v_{ie}$

Инкремент колебаний, как следует из (8.14), пропорционален параметру $s=0,71$, т. е. неустойчивость обязана термосиле. При $k_z v_{Ti} \ll v_{ie}$ инкремент падает с уменьшением k_z :

$$\gamma \approx k_z v_{Ti}. \quad (8.17)$$

Соответствие между неустойчивостями, рассмотренными в п. 1 и 2, показано на рис. 8.2.

§ 8.3. Столкновительная плазма с неоднородной температурой

Как и в § 8.2, полагаем $\omega^* > v_{ie}$. В отличие от § 8.2 градиент температуры считаем отличным от нуля, $\nabla T \neq 0$. При этих условиях могут развиваться следующие типы неустойчивостей.

1. **Гидродинамическая неустойчивость** при $k_z \approx \omega^*/v_{Te}$. Наименее вытянутые вдоль z возмущения плазмы с $\nabla T \neq 0$ описываются уравнением (7.89). Из него находим, что при $|\eta| \gg 1$ эти возмущения неустойчивы, если

$$k_z < 0,6\kappa_T k_{\perp} \rho_i. \quad (8.18)$$

Инкремент возмущений как функция k_z достигает максимума при $k_{z \text{ опт}} = 0,37\kappa_T k_{\perp} \rho_i$, равного

$$\gamma_{\text{макс}} \approx 0,21\omega_T. \quad (8.19)$$

При этом $\text{Re } \omega \ll \gamma$, так что неустойчивость почти аperiодическая.

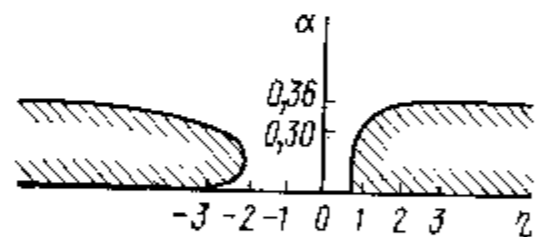


Рис. 8.3. Граница гидродинамической неустойчивости столкновительной плазмы с неоднородной температурой на плоскости $\alpha = (k_z v_{Ti} / \omega_T)^2$ и $\eta = \partial \ln T / \partial \ln n_0$

При конечных η граница неустойчивости возмущений типа (7.89) представлена на рис. 8.3. Эти возмущения не раскачиваются, если

$$\eta > 2/3 \text{ либо } \eta < -2. \quad (8.20)$$

2. **Вязкостная неустойчивость.** Если уравнение (7.89) не имеет нарастающих решений, т. е. рассмотренная выше гидродинамическая неустойчивость отсутствует, то нужно учитывать малые диссипативные эффекты. Они содержатся в уравнении (7.102). При $v_{ii} < (m_i/m_e)^{1/4} \omega^*$ главными диссипативными эффектами являются продольная ионная вязкость и продольная ионная теплопроводность. Учитывая в (7.102) только

эти эффекты, находим, что они могут приводить к неустойчивости, если

$$k_z < \kappa_T \rho_i (3 \sqrt{3/8}) (1 - 4/9\eta^2)^{1/2}. \quad (8.21)$$

Частота и инкремент нарастающих возмущений по порядку величины равны

$$\text{Re } \omega \approx \omega_T; \quad \gamma \approx \omega_T^2 / v_{ii}. \quad (8.22)$$

Из сравнения (8.21) с (8.20) следует, что вязкостная неустойчивость может играть роль только при

$$-2 < \eta < -2/3. \quad (8.23)$$

3. **Теплообменная неустойчивость.** В отличие от п. 2 теперь столкновения будет считать достаточно частыми, $v_{ii} > (m_i/m_e)^{1/4} \omega^*$. В этих условиях основными диссипативными эффектами являются теплообмен между ионами и электронами и возмущение электронной температуры вследствие недостаточно высокой теплопроводности. При $|\eta| \gg 1$ эти эффекты вызывают неустойчивость, если

$$k_z < 1,1\kappa k_{\perp} \rho_i. \quad (8.24)$$

Частота и инкремент нарастающих возмущений порядка

$$\text{Re } \omega \approx \omega_T; \quad \gamma \approx v_{ie}. \quad (8.25)$$

В плазме с конечным η теплообменная неустойчивость развивается, если $\eta > 2/3$ либо $\eta < 0$. Поскольку инкремент (8.25) мал по сравнению с (8.19), то эта неустойчивость может играть роль только при

$$-2 < \eta < 0. \quad (8.26)$$

4. **Теплопроводностная неустойчивость.** Из (7.102) следует, что с уменьшением k_z теплообмен становится несущественным и главным диссипативным эффектом является конечная электронная теплопроводность. Минимые члены дисперсионного уравнения становятся при этом порядка вещественных. В результате (7.102) сводится к уравнению (7.86). Из последнего находим, что возмущения раскачиваются, если

$$\eta < 0. \quad (8.27)$$

При $k_z v_{Ti} \approx (\omega_T v_{ei})^{1/2}$ инкремент достигает максимума, по порядку величины равного

$$\gamma_{\max} \approx |\omega_T \omega_n|^{1/2}. \quad (8.28)$$

5. Термосильная неустойчивость. Рассмотрим возмущения с $\omega < v_{ie}$. Из (7.102) получаем

$$\Gamma(\Gamma + 1)(\Gamma - 1) + 0,22 \left(\eta - \frac{2}{3} \right) (\Gamma - 1 - \theta/2) = 0, \quad (8.29)$$

где $\Gamma \equiv -i\omega \tau_e m_i / 4m_e$; $\theta = 3,16 k_z^2 T m_i \tau_e^2 / 4m_e^2$. Считая величину 0,22 малым параметром и полагая $\theta \approx 1$, находим корни (8.29). Два из них соответствуют затухающим возмущениям, $\Gamma_1 = -1$, $\Gamma_2 = -\theta$. Третий корень [ср. с (8.14)]

$$\Gamma_3 = 0,22 \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \left(1 - \frac{\theta}{2} \right). \quad (8.30)$$

Отсюда следует, что обсуждавшаяся в п. 2 § 8.2 термосильная неустойчивость имеет место, если

$$\eta < 2/3. \quad (8.31)$$

Условие неустойчивости и инкремент даются соотношениями (8.15) и (8.16).

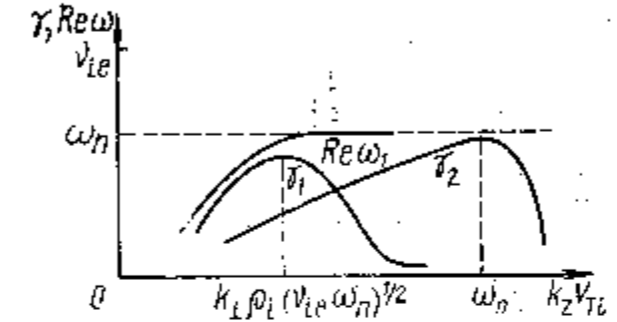
6. Инерционно-диссипативная неустойчивость. Теперь рассмотрим очень вытянутые вдоль \mathbf{B}_0 возмущения, $\omega_s / \omega^* < z_i^{-1}$. Они описываются дисперсионным уравнением (7.79). При $\eta = 0$ это уравнение обсуждалось в п. 1 § 8.2. Учет $\eta \neq 0$ не меняет качественных следствий, вытекающих из него при $\eta = 0$, так что неустойчивость этого типа имеет место при произвольных η . Инкремент и характерное волновое число определяются формулами (8.9), (8.10) с заменой ω_{ne} на $\max(\omega_{ne}, \omega_{Te})$.

§ 8.4. Сильностолкновительная плазма

В § 8.2 и 8.3 предполагалось, что столкновения не слишком часты и время передачи тепла между электронами и ионами велико по сравнению с характерной частотой: $v_{ie} < \omega^*$. Теперь предположим обратное: $v_{ie} > \omega^*$. Рассмотрим отдельно случаи $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$ и $\nabla T \neq 0$, $\nabla n_0 = 0$.

1. Плазма с неоднородной плотностью. Можно убедиться, что в сильностолкновительной плазме с неоднородной плотностью может развиваться инерционно-диссипативная неустойчивость, обсуждавшаяся в п. 1 § 8.2: она нечувствительна к величине параметра v_{ie}/ω^* . Эта неустойчивость, однако, связана с весьма вытянутыми вдоль магнитного поля возмущениями $\omega_s \approx \omega^*$ и

Рис. 8.4. Соответствие между инерционно-диссипативной (индекс 1) и термосильной (индекс 2) неустойчивостями сильностолкновительной плазмы (при $\omega_n < v_{ie}$)



поэтому не может проявляться в достаточно коротких системах.

Наряду с указанной неустойчивостью при $v_{ie} > \omega^*$ существенную роль должна играть термосильная неустойчивость, описываемая уравнением (7.93). Максимальный инкремент этой неустойчивости достигается при $k_z \approx \omega^*/v_{Ti}$. Он порядка частоты

$$\gamma_{\max} \approx 0,2 [\omega_n]. \quad (8.32)$$

При этом $\text{Re}\omega \approx \gamma_{\max}$. Граница термосильной неустойчивости характеризуется соотношением

$$k_z \leq 1,3 k_{L\rho_i}. \quad (8.33)$$

Соответствие между инерционно-диссипативной и термосильной неустойчивостями сильностолкновительной плазмы показано на рис. 8.4.

2. Плазма с неоднородной температурой. При $\nabla T \neq 0$ могут играть роль следующие типы неустойчивостей.

а. Термосильная неустойчивость. Полагая в (7.93) $\omega \ll \omega_{ne}$, находим

$$\omega^2 = -0,71 \left(\frac{2}{3} - \eta \right) (1 + 1,71\eta)^{-1} k_z^2 T / m_i. \quad (8.34)$$

Отсюда следует, что термосильная неустойчивость имеет место при

$$-1/1,71 < \eta < 2/3. \quad (8.35)$$

Таким образом, термосильная неустойчивость возможна только в плазме с не слишком большим градиентом температуры.

б. Диссипативная неустойчивость, обусловленная конечностью электронной теплопроводности. Пусть η не удовлетворяет условиям (8.35). Тогда в (7.93) необходимо учесть малые члены порядка ω^*/v_{ie} . С помощью (7.102) получаем дисперсионное уравнение

$$x^3 - x^2(1 + 1,71\eta) - \frac{10}{3}\xi x + 1,42\xi\left(\eta - \frac{2}{3}\right) + 3,16i(\xi/\sigma)(x^2 - x - 2\xi) = 0. \quad (8.36)$$

Здесь

$$x \equiv \omega/\omega_{pe}; \quad \xi \equiv k_z^2 T/m_i \omega_{pe}^2; \quad \sigma = 2m_e/m_i \nu_e \omega_{pe}.$$

Приравнявая нулю вещественную и мнимую части (8.36), находим уравнение для границы неустойчивости:

$$\frac{16}{9}\xi_0^2 + \xi_0 \left[2\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \frac{8}{9} 1,71\eta \right] + 0,71 \cdot 1,71\eta \left(\eta - \frac{2}{3}\right) = 0, \quad (8.37)$$

где $\xi_0 = \xi(k_{zгр})$. В отличие от (8.35) отсюда следует, что плазма неустойчива даже при $|\eta| \gg 1$. В этом случае инкремент порядка

$$\gamma \approx \omega_T^2/v_{ie}, \quad (8.38)$$

а граница неустойчивости определяется соотношением

$$k_z < \frac{3}{4} k_{zгр}. \quad (8.39)$$

На пределе применимости приближения сильных столкновений, когда $\omega^* \approx v_{ie}$, инкремент порядка ω^* .

§ 8.5. Суммирование результатов, полученных в § 8.2—8.4

Картина длинноволновых неустойчивостей столкновительной плазмы оказывается несколько более сложной, чем бесстолкновительной (ср. с § 6.1, 6.2). Это результат появления в задаче нового параметра — частоты столкновений. Можно, однако, обнаружить следующие закономерности, характерные для плазмы с произвольной частотой столкновений:

а) частота и инкремент нарастающих возмущений никогда не превосходят градиентной частоты:

$$\max(\gamma, \text{Re } \omega) \leq k_y v_{Ti} \rho_i / a; \quad (8.40)$$

б) продольное волновое число нарастающих возмущений всегда ограничено сверху условием

$$k_z \leq k_{y\rho_i} / a. \quad (8.41)$$

Наиболее неустойчивой следует считать плазму, в которой возможно нарастание возмущений с

$$\gamma \approx \gamma_{\max} \approx k_y v_{Ti} \rho_i / a; \quad (8.42)$$

$$k_z \approx k_{z\max} \gg k_{y\rho_i} / a. \quad (8.43)$$

К этому классу плазм относится не всякая, а лишь такая, стационарные параметры которой η и S лежат в определенных интервалах. Эти интервалы были найдены выше. Они указаны также в таблице, суммирующей результаты предыдущих пунктов, касающиеся возмущений с $k_{\perp} \approx 1/a$. Класс наиболее неустойчивых плазм обозначен в таблице как класс I.

Плазма, в которой при $k_z \approx k_{z\max}$ могут развиваться неустойчивости лишь с $\gamma \ll \gamma_{\max}$, отнесена к классу II (см. таблицу). Плазма с параметрами η и S , не лежащими в пределах, соответствующих классам I и II, может быть неустойчива, если только ее продольный размер достаточно велик, $k_z \ll k_{z\max}$. Случай довольно длинной плазмы, в которой могут развиваться неустойчивости с $\gamma \approx \gamma_{\max}$, отнесен к классу III, а с $\gamma \ll \gamma_{\max}$ — к классу IV.

Предполагается, что отношение $k_z/k_{z\max}$, соответствующее классам плазм III и IV, все же не так мало,

Классификация типов неустойчивых плазм

Класс плазм	Условия, которым удовлетворяют параметры плазмы	Вид неустойчивости	Где использованы результаты
I ($k_z \approx k_{z \text{ макс}}, \gamma \approx \gamma_{\text{макс}}$)	а) $S \geq \mu, \eta > 2/3, \eta < \dots 2$ б) $S \leq \mu, -0,6 < \eta < 2/3$	Гидродинамическая из-за градиента температуры Термосильная	п. 1 § 8.3 § 8.4
II ($k_z \approx k_{z \text{ макс}}, \gamma \ll \gamma_{\text{макс}}$)	а) $S \geq \mu^{1/2}, 2 < \eta < 2/3$ б) $\mu^{1/2} > S > \mu, -2 < \eta < 0$ в) $S \ll \mu, \eta > 2/3, \eta < -0,6$	Вязкостная Теплообменная Диссипативная	п. 2 § 8.3 п. 3 § 8.3 п. 26 § 8.4
III ($k_z \ll k_{z \text{ макс}}, \gamma \approx \gamma_{\text{макс}}$)	$S > \mu, \eta < 0$	Обусловлена конечностью электронной теплопроводности	п. 4 § 8.3
IV ($k_z \ll k_{z \text{ макс}}, \gamma \ll \gamma_{\text{макс}}$)	$S > \mu, 0 < \eta < 2/3$	Термосильная	п. 5 § 8.3 п. 2 § 8.2
V ($k_z \ll \ll k_{z \text{ макс}}, \gamma \approx \gamma_{\text{макс}}$)	S и η произвольные	Инерционно-диссипативная	п. 1 § 8.2 п. 6 § 8.3

Примечание: $\eta = \partial \ln T / \partial \ln n_{0, \mu} = (m_e/m_i)^{1/2}$, $S = \rho_i \lambda_{ce} / a^2$, см. § 7.1. Предполагается, что $k_{\perp} \approx 1/a$.

как ρ_i/a . Случай плазм, для которых это не имеет место, т. е. очень длинных плазм, $k_z/k_{z \text{ макс}} \leq \rho_i/a$, отнесен к классу V. Очень длинные плазмы неустойчивы с $\gamma \approx \gamma_{\text{макс}}$ при произвольных S и η .

В таблице указано также, какой именно тип возмущений ответствен за неустойчивость данного класса (или подкласса) плазмы, и даны ссылки на соответствующие формулы.

§ 8.6. Столкновительная плазма с током

Однородная столкновительная плазма с током неустойчива, если токовая скорость V_0 в несколько раз превышает скорость ионно-звуковых колебаний. Здесь будем считать $V_0 \ll v_{Ti} \leq (T_e/m_i)^{1/2}$ и учтем неоднородность плазмы. Нашей целью будет выяснить, какие дополнительные неустойчивости помимо рассмотренных в § 8.2 и 8.3 могут иметь место в этих условиях (ср. с аналогичной постановкой задачи в § 6.4).

1. **Инерционная неустойчивость.** Как и малые члены порядка ϵ^3 , члены с V_0 могут играть заметную роль только при относительно малом $\cos \theta$. Поэтому будем считать $\omega \gg k_z V_0$. При этом достаточно учесть члены с V_0 только в электронных уравнениях непрерывности и движения, т. е. в первом и третьем уравнениях системы (7.72). Эти уравнения теперь имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} -i(\omega - k_z V_0)n' + \mathbf{V}_E \nabla n_0 + ik_z V_{ze}' n_0 &= 0; \\ 0 = e_e n_0 E_z - ik_z T_0 n' - 1,71 ik_z n_0 T_e' - \\ - v_{ei} n_0 m_e (V_{ze}' - V_{zi}') - v_{ei} n' m_e V_0 + \frac{2}{3} v_{ei} \frac{T_e'}{T_0} n_0 m_e V_0; \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

$v_{ei} \equiv 0,51/\tau_{e0}$.

Здесь новый член с T_e' обязан температурной зависимостью $\tau_e (\tau_e \sim T_e^{3/2})$. Слабой зависимостью кулоновского логарифма от плотности пренебрегаем. При линеаризации уравнения движения учтено, что в стационарном состоянии

$$e_e E_z^{(0)} - m_e v_e V_0 = 0. \quad (8.45)$$

Используя (8.44), вместо (7.74) получаем

$$-i \frac{\cos^2 \theta}{v_e} \left(e_e \psi + \frac{n'}{n_0} T_0 + 1,71 T_e' \right) + \frac{3}{2} \frac{m_e}{T_0} \frac{k_z V_0}{k_{\perp}^2} T_e' + \frac{m_e}{m_i} \frac{e_i (\omega - \omega_{pi}^*)}{\omega_{Bi}^2} \psi = 0. \quad (8.46)$$

Полагая здесь $\omega_s \approx \omega^*$, находим, что член с V_0 важен, если

$$\frac{V_0}{v_{Ti}} > k_{\perp} \rho_i \left(\frac{\omega^*}{v_{ie}} \right)^{1/2}. \quad (8.47)$$

Это относится, однако, только к плазме с $\nabla T \neq 0$, поскольку, согласно (7.78), именно в этом случае $T_e' \neq 0$.

Будем теперь считать, что условие (8.47) выполнено и что температура плазмы неоднородна, $\nabla T_0 \neq 0$. Полагая $\omega \gg \omega^*$, в этом случае вместо (7.79) получаем дисперсионное уравнение [используются уравнения (7.77), (7.78), (8.46)]:

$$1 - i \frac{3}{2} \frac{\omega_{Te}}{\omega} \frac{m_e V_0}{k_z T_0} v_{ei} - i \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega v_{ei}}{\omega_{Bi}^2 \cos^2 \theta} = 0. \quad (8.48)$$

Максимум инкремента достигается при

$$\cos \theta \approx \frac{(\kappa_T V_0 v_{ie}^2)^{1/2}}{\omega_{Bi}}. \quad (8.49)$$

По порядку величины

$$\gamma_{\max} \approx (v_{ie} \kappa_T V_0^2)^{1/2}. \quad (8.50)$$

Используя условие (8.47), убеждаемся, что $\gamma_{\max} > \omega_T$. Таким образом, протекание продольного тока в неоднородно нагретой столкновительной плазме приводит к раскачке возмущений, инкремент которых при малых k_{\perp} велик по сравнению с ω^* .

Выражения (8.49) и (8.50) существенно зависят от поперечной инерции ионов [последний член левой части (8.48)]. В связи с этим рассматриваемая неустойчивость часто называется инерционной токово-конвективной неустойчивостью.

2. Безынерционная неустойчивость. С ростом $\cos \theta$ инкремент возмущений (8.48) убывает:

$$\gamma = \frac{3}{2} \frac{\omega_{Te} m_e V_0 v_{ei}}{k_z T_0}. \quad (8.51)$$

Это безынерционная токово-конвективная неустойчивость.

Чтобы найти пределы применимости формулы (8.51) со стороны больших k_z , надо дополнить уравнение (8.48) отброшенными выше членами порядка ω^*/ω и учесть продольную электронную теплопроводность. Пренебрегаем в (8.46) поперечной инерцией ионов (последним членом левой части), а выражение для T_e' берем из (7.85), а не из (7.78), полагая при этом $\omega \gg v_{ie}$. Тогда вместо (8.48) получаем

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} - \frac{\omega_{Te} \left(1,71 + \frac{3}{2} i \frac{m_e V_0 v_{ei}}{k_z T_0} \right)}{\omega + 2,1 i k_z^2 T_0 / v_{ei} m_e} = 0, \quad (8.52)$$

Отсюда находим условия на границе неустойчивости:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{гр} &= \omega_{ne} + 1,71 \omega_{Te}; \\ k_{z гр} &= \left(\frac{v_{ei}^2 \omega_{гр} V_0 m_e^2}{2,8 T_0^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.53)$$

По порядку величины второе равенство означает [ср. с (8.49)]:

$$(\cos \theta)_{гр} \approx \frac{(\kappa_T V_0 v_{ie}^2)^{1/2}}{\omega_{Bi}} \left(\frac{1}{k_{\perp} \rho_i} \right)^{2/3}. \quad (8.54)$$

Библиографический обзор к гл. 8

1. Кадомцев В. Б. Турбулентная утечка частиц из разряда в сильном магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 1209. Исследуется неустойчивость неоднородной плазмы с током, § 8.6.
2. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Универсальная» неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 903. Найдена теплопроводностная неустойчивость плазмы с $\partial \ln T / \partial \ln n_0 < 0$, § 8.3.
3. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. О коэффициенте диффузии Бома. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 763.
4. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Влияние конечной проводимости на устойчивость плазмы в магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 248.
5. Chen F. F. Normal modes for electrostatic ion waves in an inhomogeneous plasma. — «Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 949. В работах [3—5] была показана возможность развития неустойчивости в бестоковой плазме с неоднородной плотностью, л. 1 § 8.2.

6. Заславский Г. М., Моисеев С. С. Об аномальной диффузии плазмы в магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1964, т. 34, с. 410.
Рассмотрено влияние на устойчивость плазмы поперечной вязкости, теплопроводности, конечной проводимости и продольного тока. Показано, в частности, что поперечная ионная вязкость играет стабилизирующую роль, § 8.2 и 8.3.
7. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдсев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия. — «Атомная энергия», 1963, т. 15, с. 451.
8. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188.
В работах [7, 8] содержатся обзоры результатов по неустойчивостям столкновительной плазмы.
9. Михайловский А. Б., Погуде О. П. Влияние столкновений на дрейфовую неустойчивость плазмы при конечном ларморовском радиусе ионов. — «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, с. 64.
10. Михайловский А. Б., Погуде О. П. Кинетическая теория колебаний неоднородной плазмы со столкновениями. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 205.
В работах [9, 10] на основе использования модельного интеграла столкновений исследуются неустойчивости плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, § 8.2. В работе [10] рассмотрена также неустойчивость непотенциальных возмущений.
11. Chen F. F. Resistive overstabilities and anomalous diffusion. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 912.
Поясняется механизм неустойчивости плазмы с неоднородной плотностью.
12. Chen F. F. «Universal» overstability of a resistive inhomogeneous plasma. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1323. Обсуждается неустойчивость плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, § 8.2.
13. Hoh F. G. Instabilities due to resistivity gradients in low pressure plasma. — «Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 956. Исследуется токовая неустойчивость, § 8.6. Показано, что максимальный инкремент $\sim v_e^{1/3}$.
14. Рухадзе А. А., Силин В. П. Влияние кулоновских столкновений на дрейфовую неустойчивость плазмы. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 169, с. 558.
15. Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Дрейфово-циклотронные колебания столкновительной плазмы, распространяющиеся поперек магнитного поля. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 51, с. 628.
16. Богданкевич Л. С., Милич Б., Рухадзе А. А. К кинетической теории дрейфово-диссипативных неустойчивостей плазмы. — «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1936.
17. Рухадзе А. А., Силин В. П. Кинетическая теория дрейфово-диссипативных неустойчивостей плазмы. — «Успехи физ. наук», 1968, т. 96, с. 87.
В работах [14—17] исследуется влияние слабых столкновений на неустойчивости, § 8.1.

18. Моисеев С. С. Влияние движения ионов вдоль магнитного поля на устойчивость плазмы. — «Письма ЖЭТФ», 1966, т. 4, с. 81. Выявлена термосильная неустойчивость сильностолкновительной плазмы, § 8.4. Показано, что в случае частых столкновений возмущения температуры следует учитывать даже при $\nabla T = 0$ и что продольное движение ионов не всегда играет стабилизирующую роль.
19. Байков И. С. Гидродинамические дрейфово-диссипативные неустойчивости плазмы с неоднородной температурой. — «Письма ЖЭТФ», 1966, т. 4, с. 299.
20. Jukes J. D. Effect of temperature gradients on plasma stability. — «Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 1107.
21. Михайловский А. Б. О «наиболее опасных» неустойчивостях столкновительной плазмы в магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 1251.
В работах [19—21] исследуются неустойчивости плазмы с неоднородной температурой, § 8.3, 8.4.
22. Collisional effects in plasmas-drift-wave experiments and interpretation. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 439. Auth.: H. W. Hendel, B. Coppi, F. Perkins, P. A. Politzer.
23. Hendel H. W., Chu T. K., Politzer P. A. Collisional drift waves-identification, stabilization and enhanced plasma transport. — «Phys. Fluids», 1968, v. 11, p. 2426.
В работах [22, 23] обсуждается неустойчивость плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$ с учетом эффектов поперечной ионной вязкости, § 8.2.
24. Chen F. F. Excitation of drift instabilities in thermoionic plasmas. — «J. Nucl. Energy», Part C, 1965, v. 7, p. 399.
25. Chen F. F. Effect of sheaths on drift instabilities in thermoionic plasmas. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 752.
26. Кадомцев Б. Б. Неустойчивость плазмы. Proceedings of 7-th Intern. Conf. on Phen. in Ioniz. Gases, 1966, v. 2, p. 610. Beograd, Gradevinska Knjiga.
27. Levin A. M., Kuckes A. F. Excitation of electrostatic ion cyclotron oscillations. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 2263.
28. Шутько А. В. О дрейфовых неустойчивостях в ограниченном с торцов плазменном столбе. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 1431.
В работах [24—28] обсуждается влияние торцовых электродов и приэлектродных процессов на неустойчивости плазмы.

Глава 9

ПЛАЗМА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 9.1. Желобковая неустойчивость плотной плазмы

Поле тяжести (гравитационное поле) вводится в теорию неустойчивостей неоднородной плазмы для моделирования эффектов кривизны силовых линий

магнитного поля. Кривизна силовых линий приводит к дрейфу частиц поперек магнитного поля со скоростью порядка $V_{др} \approx v_{Тр}/R$, где R — радиус кривизны. Из-за наличия силы тяжести частицы (ионы) дрейфуют со скоростью $V_{др} \approx g/\omega_{Bi}$. Эти две скорости одного порядка при $g \approx v_{Тр}/m_i k$. Использование последнего соотношения позволяет получить простые оценки влияния кривизны на неустойчивости без рассмотрения конкретной геометрии магнитного поля, если задача о неустойчивостях решена с учетом силы тяжести. Эта идея будет иметься в виду при последующем изложении, в § 9.1—9.6.

Введение поля тяжести удобно для моделирования и некоторых других эффектов в реальной плазме, например влияния на устойчивость плазмы усредненной высокочастотной силы. Это утверждение оправдывается в § 9.7.

В настоящем параграфе покажем, что сила тяжести, направленная против градиента плотности, приводит к нарастанию возмущений с $k_z = 0$ — желобковой неустойчивости.

Пусть плазма находится в магнитном $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$ и гравитационном $\mathbf{g} \parallel \mathbf{x}$ полях. Под воздействием этих полей частицы будут двигаться поперек \mathbf{B}_0 и \mathbf{g} со скоростью

$$\mathbf{V}_g = -g\mathbf{e}_y/\omega_B. \quad (9.1)$$

В отличие от скорости электрического дрейфа \mathbf{V}_E эта скорость неодинакова для ионов и электронов. Она зависит от массы и заряда частиц, причем $|\mathbf{V}_{gi}| \gg |\mathbf{V}_{ge}|$. Поэтому при наличии g имеет место относительное движение ионов и электронов поперек магнитного поля, которое может служить причиной дополнительных к рассматриваемым выше типов неустойчивостей. Перейдем к их исследованию.

Нас будут интересовать низкочастотные возмущения $\omega \ll \omega_{Bi}$ с $k_z = 0$. При их исследовании пренебрежем эффектами порядка ω^*/ω и непотенциальностью возмущенного электрического поля. Возмущенную плотность каждого сорта частиц находим с помощью гидродинамических уравнений холодной плазмы, так же, как в § 4.1. Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) &= 0 \text{ — для ионов и электронов;} \\ \frac{\partial \mathbf{v}^{(i)}}{\partial t} - \frac{e_i}{m_i} \mathbf{E} + [\mathbf{V}^{(i)}, \omega_{Bi}] + g &= 0 \\ 0 &= \frac{e_e}{m_e} \mathbf{E} + [\mathbf{V}^{(e)}, \omega_{Be}]. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Отсюда находим, что выражение для возмущенной плотности заряда ионов отличается от (4.11) с $k_z = 0$ заменой $\omega \rightarrow \omega + k_y g/\omega_B$. Подставляя этот результат в уравнение Пуассона, приходим к следующему уравнению для возмущенного потенциала ψ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - k_y^2 \epsilon_{\perp} \psi - \frac{k_y}{\omega_{Bi}} \psi \frac{\partial \omega_{pi}^2}{\partial x} \left(\frac{1}{\omega + k_y g/\omega_{Bi}} - \frac{1}{\omega} \right) = 0. \quad (9.3)$$

Здесь $\epsilon_{\perp} \equiv 1 + (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$.

Физический смысл отдельных членов этого уравнения состоит в следующем. Члены, содержащие ϵ_{\perp} , обязаны неэлектронейтральности возмущений (единица в ϵ_{\perp}) и поперечной инерции ионов (член с $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2$). Градиентные члены обусловлены возмущенной конвекцией ионов и электронов (см. § 4.1). Учтено, что $\omega_{pi}^2/\omega_{Bi} = -\omega_{pe}^2/\omega_{Be}$. Конвекция частиц происходит в поле эффективной частоты $\omega_{\text{эф}} = \omega + gk_y/\omega_B$. Влиянием гравитационной силы на движение электронов пренебрежено.

В настоящем параграфе будем считать плазму достаточно плотной, $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$. При этом, в соответствии с (9.3), исходное уравнение будет

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(n_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - k_y^2 \psi n_0 + \frac{k_y^2 g}{\omega^2} \psi \frac{\partial n_0}{\partial x} = 0. \quad (9.4)$$

Предполагается $\omega \gg k_y g/\omega_{Bi}$.

1. Неустойчивость плазмы с резкой границей. Пусть плотность плазмы скачком меняется на расстоянии $a \ll 1/k_y$. Тогда решение уравнения (9.4) можно найти в приближении поверхностных волн (см. § 1.6). Полагаем для определенности, что плотность изменяется от значения n_1 до $n_2 \gg n_1$ (рис. 9.1). При этом получается дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - |k_y|g = 0. \quad (9.5)$$

Отсюда следует, что если гравитационная сила направлена против градиента плотности, т. е. $g < 0$ (см. рис. 9.1), то граница плазмы неустойчива с инкрементом

$$\gamma = \sqrt{|k_y g|}. \quad (9.6)$$

В связи с тем, что возмущения имеют форму желобков, ориентированных вдоль магнитного поля, рассматриваемая неустойчивость плазмы в гравитационном

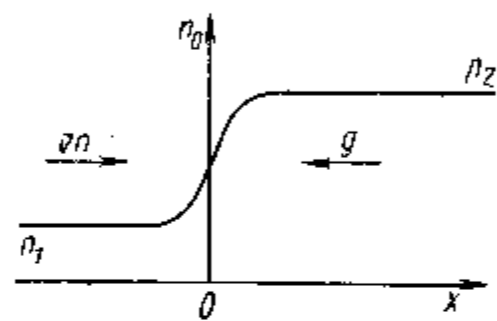


Рис. 9.1. Плазма с резкой границей

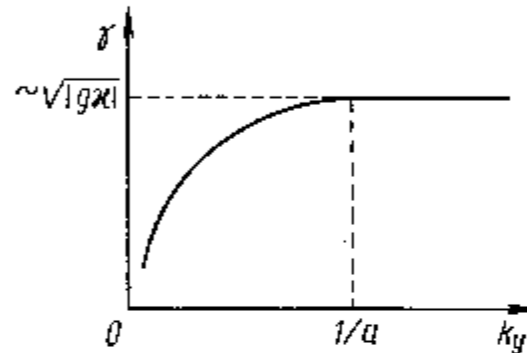


Рис. 9.2. Качественная зависимость инкремента желобковой неустойчивости от волнового числа k_y

поле называется желобковой (flute). Этой терминологией мы будем пользоваться в дальнейшем.

Отметим другие названия желобковой неустойчивости. Поскольку механизм неустойчивости обусловлен конвекцией зарядов (см. § 4.1), то ее называют также конвективной. Желобковую неустойчивость плазмы с резкой границей иногда называют неустойчивостью Крускала — Шварцшилда, впервые получивших уравнение (9.6) для плазмы. Однако возможность раскачки возмущений с инкрементом (9.6) была известна ранее в теории обычной жидкости благодаря Рэлею и Тейлору. В связи с этим желобковую неустойчивость плазмы в гравитационном поле в ряде случаев относят к типу неустойчивостей Рэля — Тейлора. Эта же неустойчивость в случае плазмы с плавной границей часто называется перестановочной (interchange). Этот термин будет пояснен несколько ниже.

2. **Мелкомасштабные возмущения плазмы с плавной границей.** В квазиклассическом приближении из (9.4) вытекает локальное дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - gk (k_y/k_\perp)^2 = 0. \quad (9.7)$$

Как и в приближении резкой границы п. 1, находим, что плазма неустойчива, если гравитационная сила направлена против градиента плотности, $gk < 0$. Инкремент возмущений

$$\gamma = \sqrt{|gk|} |k_y|/k_\perp. \quad (9.8)$$

Качественно зависимость инкремента как функции k_y , вытекающая из (9.8) и (9.6), представлена на рис. 9.2.

3. **Исследование желобковых возмущений энергетическим методом.** Из уравнений движения (9.2) приближенно следует, что электроны и ионы движутся поперек магнитного поля с одной и той же возмущенной скоростью

$$\mathbf{V}' = c[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]/B_0. \quad (9.9)$$

Учитывая это соотношение и условие электронейтральности, линеаризованную систему уравнений (9.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{V}') = 0; \quad \rho_0 \partial \mathbf{V}' / \partial t = \rho' \mathbf{g}, \quad (9.10)$$

где $\rho' \equiv m_i n'$, $\rho_0 = m_i n_0$ — возмущенная и равновесная массовые плотности. Вводя вместо возмущенной скорости \mathbf{V}' смещение плазмы ξ , определенное соотношением

$$\mathbf{V}' = \partial \xi / \partial t, \quad (9.11)$$

из первого уравнения (9.10) находим

$$\rho' = -\text{div}(\rho_0 \xi). \quad (9.12)$$

Подставляя (9.11), (9.12) во второе уравнение (9.10), приходим к следующему уравнению для смещения ξ :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\hat{K} \xi, \quad (9.13)$$

где

$$\hat{K} \xi = g \text{div}(\rho_0 \xi). \quad (9.14)$$

Нам важно знать, могут ли возмущения, описываемые этим дифференциальным уравнением второго порядка, нарастать во времени. Из теории дифференциальных уравнений следует, что в случае самосопряженного оператора \hat{K} это зависит от знака потенциальной энергии возмущений, по определению равной

$$W_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int \xi \hat{K} \xi dr. \quad (9.15)$$

Здесь интегрирование совершается по объему плазмы при соответствующих граничных условиях. Из (9.13) с использованием формулы (9.14) получаем для возмущений с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$

$$\omega^2 = W_{\text{пот}} / \int \rho_0 |\xi|^2 dr. \quad (9.16)$$

Поэтому устойчивости соответствует такая ситуация, когда при всех ξ

$$W_{\text{пот}} > 0. \quad (9.17)$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие устойчивости плазмы относительно желобковых возмущений можно получить, доказав предварительно самосопряженность оператора \hat{K} и исследовав затем знак потенциальной энергии $W_{\text{пот}}$.

Самосопряженность оператора \hat{K} означает, что при любых ξ и η должно быть

$$\int \eta \hat{K} \xi dr = \int \xi \hat{K} \eta dr. \quad (9.18)$$

При \hat{K} вида (9.14)

$$\int \eta \hat{K} \xi dr = \int \eta g \operatorname{div}(\rho_0 \xi) dr - \int \{(\eta g) \xi \nabla \rho_0 + \eta g \rho_0 \operatorname{div} \xi\} dr. \quad (9.19)$$

Для рассматриваемых здесь безвихревых возмущений плазмы в прямом магнитном поле $\operatorname{div} \xi = 0$. Учитывая также, что $g \parallel \nabla \rho_0 \parallel x$, получаем

$$\int \eta \hat{K} \xi dr = - \int \eta_x \xi_x (g \nabla \rho_0) dr. \quad (9.20)$$

Отсюда сразу же следует условие самосопряженности (9.18).

В рассматриваемом примере потенциальная энергия возмущений в соответствии с (9.15) равна

$$W_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int (\xi g) (\xi \nabla \rho_0) dr. \quad (9.21)$$

Поэтому необходимое и достаточное условие устойчивости, вытекающее из (9.17) и (9.21), имеет вид

$$g \nabla \rho_0 > 0. \quad (9.22)$$

Это находится в соответствии с результатами п. 1, 2, где критерий типа (9.22) был получен методом дисперсионного уравнения. Отметим, что в п. 1, 2 приходилось рассматривать предельные случаи крупномасштабных либо мелкомасштабных возмущений. При сделанном здесь выводе критерия (9.22) мы обошлись без этих дополнительных предположений.

Излагаемый энергетический подход дает также возможность оценить по порядку величины квадрат частоты возмущений. В частности, при \hat{K} вида (9.14) из (9.16) следует

$$\omega^2 \approx g \kappa, \quad (9.23)$$

что согласуется с оценкой для частоты, полученной в п. 1, 2.

§ 9.2. Эффект конечного ларморовского радиуса ионов

В § 9.1 пренебрегалось членами порядка ω^*/ω . При $\omega \approx \sqrt{g \kappa}$ это соответствует приближению

$$\omega^{*2} \ll g \kappa. \quad (9.24)$$

Если принять во внимание, что введем гравитационного поля моделируются эффекты кривизны силовых линий, и положить $g \approx v_{Ti}^2 / R$ (R — радиус кривизны), то при $k_{\perp} a \approx 1$ неравенство (9.24) будет означать

$$(\rho_i/a)^2 \ll a/R. \quad (9.25)$$

Плазму, параметры которой удовлетворяют этому соотношению, в теории желобковой неустойчивости при-

нято называть плазмой с нулевым ларморовским радиусом ионов. В противном случае говорят о плазме с конечным ларморовским радиусом ионов. Ниже мы рассмотрим желобковую неустойчивость такой плазмы, полагая $\beta \ll 1$, $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{Bi}^2$. Как и в § 9.1, речь будет идти только о возмущениях с $k_z = 0$.

1. **Мелкомасштабные возмущения.** С учетом конечности температуры частиц, но в пренебрежении гравитационным полем дисперсионное уравнение мелкомасштабных возмущений с $k_z = 0$ и $\omega \ll \omega_{Bi}$ можно получить, используя результаты § 4.7. Учет гравитационного поля приводит к тому, что в ионных членах заменяется $\omega \rightarrow \omega + gk_y/\omega_B$. Таким образом, при учете температуры плазмы имеем

$$1 + \frac{1}{(kd_i)^2} [1 - I_0(z_i) e^{-z_i}] + \frac{\kappa \omega_{pi}^2 k_y}{k^2 \omega_{Bi}} \left(\frac{I_0(z_i) e^{-z_i}}{\omega + gk_y/\omega_B} - \frac{1}{\omega} \right) = 0. \quad (9.26)$$

Здесь предположено также, что $\nabla T = 0$.

Примем в (9.26) $z_i \ll 1$, $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{Bi}^2$. Тогда из него получаем

$$\omega^2 - \omega \omega_{ni} - g\kappa = 0. \quad (9.27)$$

Такой же результат будет и в том случае, когда плазма описывается уравнениями столкновительного приближения, § 7.3, если пренебречь столкновительной вязкостью, малой, как $(v_{ii}/\omega) z_i$ (роль столкновительной вязкости обсуждается в § 9.6).

Линейный по ω член уравнения (9.27) обязан учету в (9.26) градиентных членов порядка z_i . Согласно § 4.7, последние являются результатом двух эффектов: возмущенной конвекции плотности зарядов поперек \mathbf{E}' и \mathbf{B}_0 и «пучкового» переноса возмущенной плотности зарядов в направлении \mathbf{E}' в результате стационарного ларморовского обтекания. Возмущенной конвекции обязаны также члены нулевого порядка по z_i , которые при суммировании по ионам и электронам взаимно сокращаются с точностью до величин порядка g (ср. с п. 1 § 9.1). Используя результаты § 4.7, «родо-

словную» члена ω_{ni} в (9.27) можно представить так:

Полный вклад в дисперсион- ное уравнение	Возмущенная конвекция порядка $(k_\perp \rho_i)^2$	«Пучковый» перенос	
$\omega_{ni} =$	$\frac{3}{2} \omega_{ni}$	$-\frac{1}{2} \omega_{ni}$	(9.28)

Линейный по ω член (9.27) можно получить также на основе следующих модельных представлений: учесть только конвекцию и предположить, что вследствие конечности ларморовского радиуса ионов на последние действует поле $\mathbf{E}'(\mathbf{r} + [\mathbf{v}, \mathbf{e}_z]/\omega_B)$ отличное от $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$. Тогда среднее по ларморовским осцилляциям и равновесной функции распределения эффективное поле будет равно

$$\left\langle \mathbf{E}' \left(\mathbf{r} + \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{e}_z]}{\omega_B} \right) \right\rangle = \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \left(1 - \frac{k^2 T_i}{m_i \omega_{Bi}^2} \right). \quad (9.29)$$

Множителем $1 - k^2 T_i / m_i \omega_{Bi}^2$ будет отличаться и конвективный вклад ионов в уравнение (9.2) (записанное в квазиклассическом приближении). При таком нестрогом подходе из модифицированного уравнения (9.2) получается (9.27).

Из (9.27) находим, что желобковая неустойчивость не развивается, если

$$\omega_{ni}^2 > 4 |g\kappa|. \quad (9.30)$$

Это условие описывает эффект стабилизации желобковой неустойчивости за счет конечности ларморовского радиуса ионов. Смысл этого названия ясен из предшествующих замечаний: стабилизация обусловлена эффектами порядка z_i . Параметр ρ_i/a выступает в явном виде также при следующей форме записи (9.30) для возмущений с $k_y \approx 1/a$ [ср. с (9.25)]:

$$(\rho_i/a)^2 > \gamma_0/\omega_{Bi}, \quad (9.31)$$

где γ — инкремент возмущений при $z_i \rightarrow 0$ [уравнение (9.7)].

2. **Крупномасштабные возмущения с $k_z = 0$.**
а. Плазма плоской симметрии. Учет в уравнении (9.3) члены с ω_{ni}/ω . Это можно сделать, исходя из уравнений (7.34) и (7.44). При $k_z = 0$ эти уравнения применимы для описания как столкновительной,

так и бесстолкновительной плазмы. Силу тяжести вводим в (7.34), (7.44), заменяя в ионных уравнениях $\mathbf{V}_E \rightarrow \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_g$, где \mathbf{V}_g определено уравнением (9.1). В результате

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[n_0 \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - k_y^2 n_0 \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} - \frac{g\kappa}{\omega^2} \right) \psi = 0 \quad (9.32)$$

(предполагаем $\nabla T_i = 0$).

В приближении узкого переходного слоя ($k_y a \ll 1$) отсюда вытекает дисперсионное уравнение [ср. с (9.5)]:

$$\omega^2 - k_y^2 \rho_i^2 \omega \omega_{Bi} - g |k_y| = 0. \quad (9.33)$$

Из (9.33) видно, что при очень малом g , когда

$$(k_y \rho_i)^2 > 2 (|g k_y|)^{1/2} / \omega_{Bi}, \quad (9.34)$$

желобковая неустойчивость типа (9.5) не развивается. На границе применимости приближения узкого переходного слоя ($k_y \approx 1/a$) критерий стабилизации (9.34) качественно совпадает с (9.28).

Таким образом, в случае плазмы плоской симметрии имеет место эффект стабилизации не только мелкомасштабных, но и крупномасштабных желобковых возмущений.

б. Плотная плазма цилиндрической симметрии. Предполагаем, что плазма обладает цилиндрической симметрией, $n_0 = n_0(r)$, и что сила \mathbf{g} имеет только радиальную компоненту, $\mathbf{g} = (g, 0, 0)$. С помощью (7.34), (7.44) теперь вместо (9.32) получаем

$$\begin{aligned} & \nabla_{\perp} \left[\nabla_{\perp} \psi \left(n_0 - \frac{T_i}{m_i \omega_{Bi} \omega} \frac{l}{r} \frac{\partial n_0}{\partial r} \right) \right] + \\ & + \psi \left[\frac{T_i}{m_i \omega_{Bi} \omega} \frac{l}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial n_0}{\partial r} \right) + \frac{l^2}{r^2} \frac{\partial n_0}{\partial r} - \frac{g}{\omega^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Здесь l — номер азимутальной моды [$\psi \sim \exp(il\varphi)$].

При $l=2, 3, \dots$ из (9.35) вытекают качественно такие же результаты, как и в случае плазмы плоской симметрии. В этом можно убедиться следующим образом. Проинтегрируем уравнение (9.35) с весом ψ^* по се-

чению плазмы, предполагая, что на границе интегрирования $n_0 = 0$. При этом получаем

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0, \quad (9.36)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int n_0 |\nabla \psi|^2 dr; \\ B &= - \frac{l T_i}{m_i \omega_{Bi}} \int dr \frac{1}{r} \frac{\partial n_0}{\partial r} \left\{ (l^2 - 1) \frac{|\psi|^2}{r^2} + \left| \frac{\psi}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|^2 \right\}; \\ C &= l^2 \int |\psi|^2 \frac{g}{r^2} \frac{\partial n_0}{\partial r} dr. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Видно, что если только $l \neq 1$, то при любой зависимости $\psi(r)$ $B \neq 0$, и тогда по порядку величины остается в силе критерий стабилизации (9.30).

Особым является случай возмущений с $l=1$. В этом случае уравнение (9.35) записывается в виде

$$\frac{d}{dr} \left(r G \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{\psi}{r} \frac{d}{dr} (r G) = - \psi \frac{dn_0}{dr} \left(1 + \frac{g}{r\omega^2} \right), \quad (9.38)$$

$$\text{где } G = n_0 - \frac{T_i}{m_i \omega_{Bi} \omega} \frac{1}{r} \frac{\partial n_0}{\partial r}.$$

При $\omega \ll \omega_{ni}$ уравнение (9.38) относится к классу уравнений с большим параметром при старшей производной. В нулевом приближении по этому параметру решением (9.38) является функция

$$\psi_0 = r. \quad (9.39)$$

Эта функция обращает левую часть (9.37) в нуль при любой форме $n_0(r)$. Если металлический кожух не находится слишком близко к плазме, то решение (9.38) удастся сшить со спадающим решением вне плазмы. Приняв это во внимание и записав условие ортогональности правой части (9.38) к решению нулевого приближения $\psi_0(r)$, получим

$$\omega^2 = \int_0^a r dr \frac{\partial n_0}{\partial r} g / 2 \int_0^a n_0 r dr. \quad (9.40)$$

Видно, что возмущения с $l=1$ и $\psi(r) \approx r$ не стабилизируются даже при большом ω_{pi}/ω [это следует и из (9.36), (9.37)]. Этот результат легко понять, если заметить, что потенциалу вида $\psi = r \exp(i\varphi)$ соответствует электрическое поле, не зависящее от координат

$$\mathbf{E}' = \text{const.} \quad (9.41)$$

В таком поле ионы движутся так же, как и при $\rho_i \rightarrow 0$, а потому конечность ρ_i/a не играет роли.

Стабилизация возмущений с $l=1$ имеет место, если плазма граничит с проводящим кожухом. При этом собственные функции существенно отличаются от $\psi_0(r)$, а тогда, согласно (9.37), $B \neq 0$.

в. Гауссовское распределение плотности и $g \sim r$. В случае, если плотность спадает с радиусом по закону $n_0 = \bar{n} \exp[-(r/a)^2]$, а гравитационная сила, имитирующая искривленность силовых линий, пропорциональна радиусу, $g = g_0 r/a$, уравнение (9.35) приводится к виду

$$\psi'' + \frac{\psi'}{r} - \frac{l^2}{r^2} \psi - \frac{2}{a^2} (r\psi' - v\psi) = 0, \quad (9.42)$$

где

$$v = - \frac{\omega_i^*/\omega \cdot l^2 g_0 / a \omega^2}{1 - \omega_i^*/\omega}; \quad \omega_i^* = -2lT_i / a^2 \omega_{Bi}. \quad (9.43)$$

Сделав здесь замены $(r/a)^2 = x$, $\frac{1-v}{2} = \mu$, $l/2 = s$, $\psi = y(x) \exp(x/2) / \sqrt{x}$, получим уравнение Уиттекера:

$$y'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\mu}{x} + \frac{1/4 - s^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (9.44)$$

Решением его являются функции Уиттекера $W_{\mu s}(x)$ и $W_{-\mu s}(-x)$. Составим из них собственную функцию, полагая, что плазма окружена проводящим кожухом, расположенным при $r = r_0 \gg a$, т. е. при $x \gg 1$. Используя асимптотическое представление функций Уиттекера, заключаем, что при таком граничном условии приближенной собственной функцией является $W_{\mu s}(x)$ с индексом $\mu = \frac{1}{2} + s + n$, где n — целое число. Из этого ра-

венства вытекает следующее уравнение для собственных частот колебаний:

$$v = l + 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.45)$$

где v определено равенством (9.43). С помощью (9.43) и (9.45) находим

$$\omega^2 - \omega_i^* \omega \left(1 - \frac{1}{l + 2n} \right) + \frac{l^2 g_0}{a(l + 2n)} = 0. \quad (9.46)$$

Видно, что возмущения нижнего уровня первой моды ($n=0, l=1$) не чувствительны к величине ω_i^* и имеют такой же инкремент, как и при $\omega_i^* = 0$. Это находится в соответствии с общими результатами п. 2б. Все другие возмущения при достаточно больших ω_i^* должны обладать вещественной частотой.

§ 9.3. Желобковая неустойчивость разреженной плазмы

В отличие от § 9.1, 9.2 теперь будем считать $\omega_{pi} \lesssim \omega_{Bi}$. Ограничимся рассмотрением мелкомасштабных возмущений, $k_{\perp} a \gg 1$. Сначала членами порядка ω_i^*/ω будем пренебрегать, а затем учтем их, п. 2.

1. Плазма с нулевым ларморовским радиусом ионов. Исходим из уравнения (9.3). В § 9.1 это уравнение было исследовано при $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$. Теперь примем обратное, $\omega_{pi} \ll \omega_{Bi}$. Из (9.3) при этом следует

$$\omega \left(\omega + \frac{gk_y}{\omega_{Bi}} \right) - \frac{g\omega_{pi}^2 k_y^2}{\omega_{Bi}^2 k_{\perp}^2} = 0. \quad (9.47)$$

Отсюда находим, что желобковая неустойчивость невозможна, если плотность плазмы очень мала:

$$\omega_{pi}^2 < \frac{1}{4} k_y^2 \left| \frac{g}{\kappa} \right|. \quad (9.48)$$

При обратном условии плазма неустойчива. Инкремент возмущений при этом равен

$$\gamma = \sqrt{|g\kappa|} \frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}} \frac{|k_y|}{k_{\perp}}. \quad (9.49)$$

Он мал по сравнению с инкрементом возмущений плотной плазмы (9.7). Качественно зависимость инкремента желобковой неустойчивости от плотности дается на рис. 9.3.

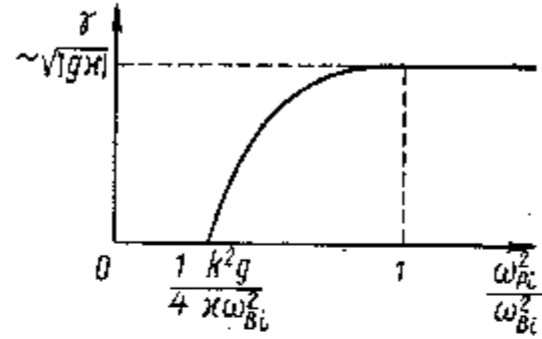


Рис. 9.3. Качественная зависимость инкремента желобковой неустойчивости от плотности

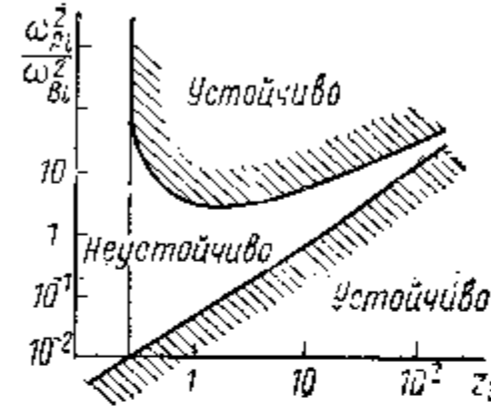


Рис. 9.4. Граница желобковой неустойчивости на плоскости $((\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2, z_i \equiv (k_{\perp} \rho_i)^2)$

2. Плазма с конечным ларморовским радиусом ионов. С помощью (9.26) находим, что с понижением плотности критерий стабилизации желобковых возмущений оказывается более жестким, чем (6.30):

$$\omega_{pi}^2 > 4 |gk| (1 + \omega_{Bi}^2/\omega_{pi}^2). \quad (9.50)$$

При достаточно малой плотности, $(\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 < |gk|/v_{Ti}^2$ из (9.26) следует, что не раскачиваются только возмущения с $k_{\perp} \rho_i \geq 1$. При этом в (9.26) следует, однако, учесть все степени параметра z_i . Граница устойчивости, получающаяся с помощью полного уравнения (9.26), представлена на рис. 9.4.

§ 9.4. Стабилизирующее влияние проводящих торцов

Рассмотрим возмущения с $k_z \neq 0$, предполагая их электрическое поле потенциальным. В случае бесстолкновительной плазмы и $\omega > k_z v_{Te}$ это предположение оправдывается, если мала погонная плотность электронов, т. е. $\Pi_e \equiv (\omega_{pe} a/c)^2 \ll 1$. Если плазма столкновительная и $\omega > (k_z v_{Te})^2/\nu_{ei}$, то непотенциальностью можно

пренебречь при $\Pi_e \ll \nu_{ei}/\omega$. В случае k_z , больших, чем в приведенных выше неравенствах, непотенциальность несущественна и при больших Π_e . Пусть $\sqrt{|gk|} \gg \omega^*$. В этом случае, как и при $k_z = 0$, косые возмущения с $\omega > k_z v_{Te}$ можно описывать, исходя из гидродинамических уравнений холодной плазмы типа (9.2). Таким путем приходим к уравнению (9.3), в левую часть которого добавлен член $(k_z \omega_{pe}/\omega)^2 \psi$, обязанный продольному движению электронов. Для случая мелко-масштабных возмущений получается дисперсионное уравнение

$$1 + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \cos \theta\right)^2 + \frac{\kappa k_y \omega_{pi}^2}{\omega_{Bi} k^2} \left(\frac{1}{\omega + k_y g/\omega_{Bi}} - \frac{1}{\omega}\right) = 0. \quad (9.51)$$

1. Плазма с $\omega_{pi} > \omega_{Bi}$. Для такой плазмы из (9.51) вытекает [ср. с (9.7)]

$$\omega^2 - \omega_{Bi}^2 (m_i/m_e) \cos^2 \theta - gk (k_y/k_{\perp})^2 = 0. \quad (9.52)$$

Отсюда находим, что желобковая неустойчивость имеет место только при достаточно малых k_z :

$$\frac{k_z}{k_{\perp}} < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{|gk|}}{\omega_{Bi}}. \quad (9.53)$$

Если плазма на торцах граничит с металлом, то k_z пробегает дискретный ряд значений:

$$k_z = \pi n/L, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.54)$$

Из (9.53) видно, что при $k_{\perp} a \approx 1$ условие неустойчивости не может быть выполнено, если

$$\frac{L}{a} < \pi \left(\frac{m_i}{m_e} \frac{aR}{\rho_i^2}\right)^{1/2}. \quad (9.55)$$

Таким образом, при контакте с торцами плазма может быть стабилизирована даже при невыполнении условия (9.31). При этом могут быть подавлены неустойчивости всех мод, в том числе $l=1$.

2. Плазма с $\omega_{pi} < \omega_{Bi}$. Вместо (9.52) теперь имеем [ср. с (9.47)]

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta - g\kappa (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 (k_y/k)^2 = 0. \quad (9.56)$$

Критерии устойчивости (9.53) и (9.55) остаются прежними.

§ 9.5. Стабилизация бесстолкновительной плазмы отрицательным g .

Гравитационно-кинетическая неустойчивость при $g > 0$

Выше было показано, что гравитационная сила при $g\kappa < 0$ вызывает желобковую неустойчивость, а при $g\kappa > 0$ приводит к появлению новых ветвей колебаний с вещественной частотой. Это относилось к возмущениям с $k_z = 0$. При $k_z \neq 0$ в плазме есть и другие ветви колебаний, не связанные с наличием g . Рассмотрим, как гравитационная сила влияет на эти ветви колебаний.

Предварительно введем понятие положительного и отрицательного g . Исследуемый плоский слой плазмы в гравитационном поле является моделью реальной плазмы в кривом магнитном поле с радиально спадающей плотностью $\partial n_0/\partial r < 0$. Поэтому случай $g\nabla n_0 < 0$ соответствует положительному направлению g , $g > 0$, а случай $g\nabla n_0 > 0$ — отрицательному, $g < 0$. Условно эти две ситуации можно называть случаем плазмы с положительным либо отрицательным g .

Желобковая неустойчивость возникает при $g > 0$. Ниже будет показано, что при таком же знаке g гравитационная сила оказывает дестабилизирующее влияние и на другие ветви колебаний. Напротив, плазма с $g < 0$ оказывается более устойчивой, чем при $g = 0$.

1. Возмущения с $\omega \gg k_z v_{Te}$. Согласно п. 1 § 6.1, в отсутствие гравитационной силы возмущения с $\omega > k_z v_{Te}$ и достаточно малым $\cos \theta$ нарастают во времени. Рассмотрим влияние гравитационной силы на эту неустойчивость. Исходим из дисперсионного уравнения

$$1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} - \left(\frac{\omega_{Bi}}{\omega}\right)^2 \frac{m_i}{m_e} \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}\right) - \frac{g\kappa}{\omega^2} = 0. \quad (9.57)$$

Отсюда следует, что при g , направленном против градиента плотности, $g\kappa < 0$ (положительные g), инкремент косых возмущений только увеличивается. В противном случае, $g\kappa > 0$, имеет место стабилизация этих возмущений, если по порядку величины

$$g\kappa > \omega_{ne}^2. \quad (9.58)$$

Записанный через кривизну силовых линий, этот критерий стабилизации при $T_e \approx T_i$ означает

$$a/R > (k_{\perp} \rho_i)^2. \quad (9.59)$$

Видно, что длинноволновые возмущения, $k_{\perp} \approx 1/a$, могут быть стабилизированы уже при небольших a/R , $a/R \approx (\rho_i/a)^2$ [ср. с (9.25)].

2. Возмущения с $v_{Ti} < \omega/k_z < (v_{Te}, \omega_{Bi})$, $z_i \ll 1$ в плазме с $\nabla T = 0$. При $g = 0$ такого типа возмущения описываются уравнением (6.12). Учитывая в этом уравнении гравитационную силу заменой в ионных членах $\omega \rightarrow \omega + gk_y/\omega_{Bi}$, получаем

$$1 + z_i \left(1 + \frac{\omega_{ni}}{\omega + gk_y/\omega_{Bi}}\right) - \frac{\omega_{ne}}{\omega + gk_y/\omega_{Bi}} + \frac{i\sqrt{\pi}(\omega - \omega_{ne})}{|k_z|v_{Te}} = 0. \quad (9.60)$$

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega - \omega_{ne} (1 - 2z_i) - gk_y/\omega_{Bi}; \\ \gamma = \sqrt{\pi} (\omega_{ne}^2/k_z v_{Te}) (2z_i - gm_i/\kappa T). \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

При $g\kappa > 0$ сила тяжести приводит к стабилизации возмущений, если выполнен критерий (9.58) или, что то же самое, (9.59). Это эффект стабилизации отрицательным g кинетически раскачиваемых возмущений плазмы с неоднородной плотностью.

Если $g\kappa < 0$ и условие (9.58) выполнено, то имеет место гравитационно-кинетическая неустойчивость с инкрементом

$$\gamma \approx z_i \gamma_0^2 / |k_z| v_{Te}, \quad (9.62)$$

где $\gamma_0 \equiv \sqrt{|g\kappa|}$ — инкремент желобковой неустойчивости,

§ 9.6. Стабилизация столкновительной плазмы отрицательным g .

Гравитационно-диссипативная неустойчивость при $g > 0$

Возмущения столкновительной плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$ и $g = 0$ описываются дисперсионным уравнением (7.79). Если в ионных уравнениях (7.34), (7.44) учесть гравитационное поле заменой $E \rightarrow E + \frac{m}{e}g$, то вместо (7.79) получим

$$1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} + i \frac{\omega_s}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}\right) - \frac{g\kappa}{\omega^2} \left(\frac{k_y}{k}\right)^2 = 0. \quad (9.63)$$

Отсюда находим, что гравитационная сила влияет на рассмотренную в § 8.2 инерционно-диссипативную неустойчивость при условии (9.58). Если это условие выполнено, то при $g\kappa > 0$ указанная неустойчивость подавляется — эффект отрицательного g .

При $k_z = 0$, $g\kappa < 0$ и $\omega_{ni}^2 < |g\kappa|$ уравнение (9.63) описывает желобковую неустойчивость с инкрементом $\gamma = \gamma_0 = |g\kappa|^{1/2}$. Столкновения начинают влиять на эту неустойчивость при

$$\cos \theta \gtrsim (v_{te} \gamma_0)^{1/2} / \omega_{Bi}. \quad (9.64)$$

При этом инкремент возмущений

$$\gamma \approx z_i \gamma_0^2 v_{ei} / (k_z v_{Te})^2. \quad (9.65)$$

Это гравитационно-диссипативная неустойчивость. Ее инкремент больше, чем инкремент инерционно-диссипативной неустойчивости (при оговоренном выше условии $\omega_n^2 < g\kappa$). Отметим, что на предельности столкновительного и бесстолкновительного приближений, т. е. при $v_{ei} \approx k_z v_{Te}$, формулы (9.62) и (9.65) качественно совпадают. При модельном описании столкновений (см. § 9.7) оба эти результата получаются как предельные случаи одного и того же выражения.

Учитывая ионную вязкость, можно найти, что гравитационная сила с $g > 0$ приводит также к раскачке колебаний желобкового типа $k_z = 0$ даже в условиях, когда имеет место эффект стабилизации конечного ларморов-

ского радиуса ионов. В этом случае указанный тип возмущений описывается дисперсионным уравнением

$$\left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) \left(1 - iz_i \frac{v_{i\phi}}{\omega}\right) - \frac{g\kappa}{\omega^2} \left(\frac{k_y}{k_\perp}\right)^2 = 0. \quad (9.66)$$

Здесь $v_{i\phi} = 0,7 v_{ii}$ при $\omega \gg v_{ii}$ (см. § 7.1) и $v_{i\phi} = 0,3 v_{ii}$ при $\omega \ll v_{ii}$ (см. § 7.4). В модели Батнагара — Гросса — Крука $v_{i\phi} = v_{ii} \left[\frac{9}{4} - \frac{\omega}{\omega + iv_{ii}} \right]$ (см. § 7.7).

Рассмотрим уравнение (9.66) в предположениях $g\kappa < 0$, но $\omega_{ni}^2 > 4|g\kappa|$; при этом обычная желобковая неустойчивость не развивается (см. § 9.2). Примем для простоты $\omega_{ni}^2 \gg |g\kappa|$, $\omega \gg v_{i\phi} z_i$. Тогда из (9.66) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= \omega_{ni} + g\kappa / \omega_{ni} \\ \gamma &= (\gamma_0 / \omega_{ni})^2 z_i v_{i\phi} \end{aligned} \right\} \quad (9.67)$$

Видно, что вследствие ионной вязкости желобковые возмущения раскачиваются, даже несмотря на стабилизирующий эффект конечного ларморовского радиуса ионов.

§ 9.7. Плазма в высокочастотном поле

1. Усредненная высокочастотная сила. Пусть в плазме наряду с постоянным полем \mathbf{B}_0 имеется переменное электромагнитное поле (ВЧ-поле) с компонентами

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= (0, 0, \tilde{E}_z(x) \exp(-i\Omega t)); \\ \tilde{\mathbf{B}} &= (0, \tilde{B}_y(x) \exp(-i\Omega t), 0). \end{aligned} \right\} \quad (9.68)$$

В таком поле частицы приобретают продольную скорость, равную

$$\tilde{v}_z = \frac{ie}{m\Omega} \tilde{E}_z. \quad (9.69)$$

ВЧ-поле влияет и на поперечное движение частиц. На частицы действует дополнительная поперечная сила

$$F_x = -\frac{e}{c} \tilde{v}_z \tilde{B}_y. \quad (9.70)$$

Усредняя этот результат по периоду ВЧ-поля и выражая \bar{v}_z и \bar{B}_y через \bar{E}_z , находим, что влияние ВЧ-поля на плазму аналогично влиянию некоторой эффективной гравитационной силы, действующей в основном на электроны:

$$g_{\text{эф}}^{(e)} = - \left(\frac{e}{m\Omega} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} |\bar{E}_z|^2. \quad (9.71)$$

2. Влияние ВЧ-силы на устойчивость плазмы. Поле поляризации типа (9.68) с $\Omega < \omega_{pe}$ проникает в плазму на расстояние порядка c/ω_{pe} (это находим из уравнений Максвелла). Его влияние на устойчивость плазмы может быть заметным, если

$$c/\omega_{pe} \geq a. \quad (9.72)$$

а. Низкочастотные неустойчивости. Для плазмы с $\rho_i/a < (m_e/m_i)^{1/2}$ условие (9.72) означает

$$\beta < (m_e/m_i)^2. \quad (9.73)$$

В этом случае основными являются низкочастотные неустойчивости (см. § 6.1). Поскольку $g_{\text{эф}}$ направлено в сторону увеличения плотности, то, согласно § 9.1, ВЧ-поле должно играть стабилизирующую роль. В частности, окажется невозможным развитие длинноволновой неустойчивости (п. 1 § 6.1), если

$$|\bar{v}_{ze}|/v_{Ti} \geq \rho_i/a \approx ((m_i/m_e)\beta)^{1/2}. \quad (9.74)$$

б. Неустойчивости с $\omega > \omega_{ni}$. Если давление плазмы не чрезмерно мало:

$$(m_e/m_i)^2 < \beta < m_e/m_i, \quad (9.75)$$

то условие (9.72) удовлетворяется при $(m_e/m_i)^{1/2} < \rho_i/a < 1$. В этом случае при $g_{\text{эф}} > 0$ могут развиваться неустойчивости с частотами вблизи ионных циклотронных гармоник (§ 5.1). Влияние ВЧ-поля на эти колебания найдем, сделав в электронном вкладе в уравнение (5.6) замену

$$\omega \rightarrow \omega + k_y g_{\text{эф}}/\omega_{Be}. \quad (9.76)$$

Тогда вместо (5.6) получаем

$$1 + k_{\perp}^2 \left(d_i^2 + \frac{m_e}{m_i} \rho_i^2 \right) - \frac{\omega_{ni}}{\omega + k_y g_{\text{эф}}/\omega_{Be}} - \frac{\omega - \omega_{ni}}{v^2 2\pi z_i (\omega - n\omega_{Bi})} = 0. \quad (9.77)$$

Отсюда следует, что циклотронная неустойчивость не развивается, если

$$g_{\text{эф}}/\omega_{Be} \geq \rho_i^2 v_{Ti}/a, \quad (9.78)$$

т. е. при

$$m_e |\bar{v}_{ze}|^2 \geq T. \quad (9.79)$$

Это означает, что для стабилизации циклотронных возмущений необходимы столь большие \bar{E} , что удержание плазмы осуществляется вследствие градиента ВЧ-поля, а не градиента магнитного поля.

Из п. 1 и 2 вытекает, что использование ВЧ-поля указанной выше поляризации для стабилизации плазмы, удерживаемой постоянным магнитным полем, может оказаться эффективным лишь при условии (9.73). В противном случае ВЧ-поле либо не проникает достаточно глубоко в переходной слой между плазмой и вакуумом, либо, если этот слой достаточно узок, не подавляет наиболее быстро развивающихся неустойчивостей.

Библиографический обзор к гл. 9

1. Chandrasekhar S. «Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability», Oxford, Clarendon Press, 1961. В гл. X этой монографии подробно исследуется неустойчивость Рэлея—Тейлора в обычной жидкости. Там же приведена библиография по этому вопросу.
2. Kruskal M., Schwarzschild M. Some instabilities of a completely ionized plasma. — «Proc. Roy. Soc.», 1954, v. A233, p. 348. Рассмотрена неустойчивость границы плазмы, находящейся в гравитационном поле, п. 1, § 9.1.
3. Longmire C. L., Rosenbluth M. N. Stability of plasmas confined by magnetic fields. — «Ann. Phys.», 1957, v. 1, p. 120. Обсуждается механизм желобковой неустойчивости.
4. An energy principle for hydromagnetic stability problems. — «Proc. Roy. Soc.», 1958, v. A244, p. 17. Auth.: I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, R. M. Kulshrud.

5. **Lehnert V.** Stability of a plasma boundary in a magnetic field—«Phys. Fluids», 1961, v. 4, p. 847.
Рассмотрен стабилизирующий эффект проводящих торцов в случае плазмы малой плотности, § 9.4.
6. **Кадомцев Б. Б.** О турбулентности плазмы в ловушке с магнитными пробками.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 40, с. 328.
7. **Кадомцев Б. Б.** Турбулентная конвекция плазмы в магнитном поле.—«Ядерный синтез», 1961, т. 1, с. 286.
В работах [6, 7] рассмотрена желобковая неустойчивость разреженной плазмы в приближении $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$.
8. **Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N.** Finite Larmor radius stabilization of «weakly» unstable confined plasmas.—«Nucl. Fusion», Suppl. 1, 1962, p. 143.
Указано на возможность появления эффекта стабилизации за счет конечности ларморовского радиуса ионов, § 9.2. Рассмотрены случаи плоского слоя плазмы и случаи цилиндрической плазмы с гауссовским распределением плотности.
9. **Рудаков Л. И.** Влияние вязкости плазмы в магнитном поле на устойчивость плазмы.—«Ядерный синтез», 1962, т. 2, с. 107.
10. **Roberts K. V., Taylor J. B.** Magnetohydrodynamic equations for finite Larmor radius.—«Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 8, p. 197.
В работах [9, 10] указывается, что эффект конечного ларморовского радиуса содержится в гидродинамических уравнениях с магнитной вязкостью.
11. **Hoh F. C.** Simple picture of the finite Larmor radius stabilization effect.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 1359.
Дается наглядная картина стабилизирующего эффекта конечного ларморовского радиуса ионов.
12. **Михайловский А. Б.** Конвективная неустойчивость и эффект стабилизации в разреженной высокотемпературной плазме.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, с. 509.
13. **Cooperative oscillations in high-temperature plasma formed by neutral atom injection.**—«Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 10, p. 323. Auth.: C. C. Damm, J. H. Foote, A. H. Futch, R. F. Post.
В работах [12, 13] исследуется желобковая неустойчивость разреженной плазмы с конечным ларморовским радиусом ионов, § 9.3.
14. **Михайловский А. Б.** Колебания неоднородной плазмы.—В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леоновича. Вып. 3. М., Атомиздат, 1963, с. 141.
Получен критерий стабилизации за счет конечности ларморовского радиуса ионов плазмы с резкой границей, п. 2а, § 9.2.
15. **Кулешов В. Ф., Рухадзе А. А.** Теория желобковой неустойчивости неоднородной плазмы.—«Ядерный синтез», 1964, т. 4, с. 169.
16. **Jukes J. D.** Micro-instabilities in magnetically-confined, inhomogeneous plasma.—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 1468.
17. **Krall N. A., Rosenbluth M. N.** Universal instability in complex field geometry.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1488.
В работах [15—17] рассмотрено влияние гравитационной силы на градиентные неустойчивости бесстолкновительной плазмы, § 9.5.
18. **Johnson J. L., Greene J. M., Coppi B.** Effect of resistivity on hydromagnetic instabilities in multipolar systems.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 1169.
19. **Jukes J. D.** Gravitational resistive instabilities in plasma with finite Larmor radius.—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 52.
20. **Chen F. F.** «Universal» overstability of a resistive inhomogeneous plasma.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1323.
В работах [18—20] обсуждается гравитационно-диссипативная неустойчивость, § 9.6.
21. **Coppi B., Rosenbluth M. N.** Collisional interchange instabilities in shear and $\int dl/B$ stabilized systems.—«Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», IAEA, Vienna, 1966, v. 1, p. 617.
Рассмотрена неустойчивость за счет поперечной вязкости, § 9.6.
22. **Михайловский А. Б.** Желобковая неустойчивость аксиально-симметричной плазмы с конечным ларморовским радиусом ионов.—«Ядерный синтез», 1964, т. 4, с. 108.
- 22а. **Михайловская Л. В., Михайловский А. Б.** Исправления к работе «Желобковая неустойчивость аксиально-симметричной плазмы с конечным ларморовским радиусом ионов».—«Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 249.
23. **Jungwirth K., Seidl M.** Theory of the flute instability in mirror machines.—«J. Nucl. Energy», 1965, v. C7, p. 563.
24. **Rosenbluth M. N., Simon A.** Finite Larmor radius equations with nonuniform electric fields and velocities.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1300.
В работах [22—24] можно найти обсуждение первой моды желобковой неустойчивости в плазме с конечным ларморовским радиусом ионов, § 9.2.
25. **Устойчивость турбулентно-нагретой плазмы при адиабатическом сжатии.**—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, с. 1631. Авт.: М. В. Бабыкин, И. П. Гавриш, Е. К. Завойский, Л. И. Рудаков, В. А. Скорюнин.
Обсуждается стабилизирующее влияние заправочной плазмы.
26. **Krall N. A.** Flute instability for a general mirror equilibrium.—«J. Nucl. Energy», 1965, v. C7, p. 283.
27. **Krall N. A.** Stabilization of hot electron plasma by a cold background.—«Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 820.
28. **Kuckes A. F.** Interchange instability in a hot-electron plasma.—«Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 2239.
В работах [26—28] обсуждаются некоторые стабилизирующие эффекты, играющие роль в случае плазмы с горячими электронами, $T_e \gg T_i$.
29. **Experimental and theoretical studies of instabilities in a high energy neutral injection mirror machine.**—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 988. Auth.: L. G. Kuo, E. G. Murphy, M. Petrávič, D. R. Sweetman.
30. **Remarks of the finite Larmor radius stabilization theory for mirror machines.**—«J. Nucl. Energy», 1964, v. C6, p. 505. Auth.: L. G. Kuo, E. G. Murphy, M. Petrávič, D. R. Sweetman.
В работах [29, 30] обсуждается желобковая неустойчивость разреженной плазмы цилиндрической симметрии.

31. **Lehnert V.** Short-circuit of flute disturbances at a plasma boundary. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 1367.
Обсуждается стабилизирующая роль конечного a/R и плотной холодной оболочки плазмы.
32. **Chen F. F.** Excitation of drift instabilities in thermoionic plasmas. — «J. Nucl. Energy», 1965, v. C7, p. 399.
Дан обзор неустойчивостей столкновительной плазмы при наличии гравитационной силы. Там же обсуждается влияние проводящих и непроводящих торцов на желобковую неустойчивость.

Работы, посвященные высокочастотной стабилизации плазмы с малым β

33. **Волков Т. Ф., Кадомцев Б. Б.** Стабилизация плазмы низкого давления высокочастотным полем. — «Атомная энергия», 1962, т. 13, с. 429.
Исследуется вопрос о подавлении желобковой неустойчивости.
34. **Михайловский А. Б., Сидоров В. П.** Устойчивость скин-слоя в плазме со столкновениями. — «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1630.
Показано, что в случае столкновительной плазмы, $\Omega < \nu_{ei}$, эффект градиента ВЧ-поля не проявляется.
35. **Кореску V.** The drift-cyclotron instability of plasma in an inhomogeneous high frequency field. — «Plasma Physics», 1968, v. 10, p. 609.
Исследуется влияние градиента ВЧ-поля на ионно-циклотронные колебания.
36. **Демирханов Р. А., Гуткин Т. И., Лозовский С. Н.** Дрейфовая неустойчивость бесстолкновительной плазмы в высокочастотном поле E -волны. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 2195.
Исследуется влияние ВЧ-поля на низкочастотную неустойчивость плазмы с неоднородными плотностью и температурой.

Глава 10

ПЛАЗМА В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

§ 10.1. Низкочастотная центробежная неустойчивость

В настоящей главе рассмотрим неустойчивости плазмы, в которой наряду с магнитным полем $\mathbf{B}_0 \parallel z$ имеется электрическое $\mathbf{E}_0 \perp z$. Электрическое поле может приводить к неустойчивости по двум причинам. В случае цилиндрической плазмы, когда это поле направлено по радиусу, причиной неустойчивостей может быть центро-

бежный эффект — различие азимутальных скоростей дрейфа ионов и электронов из-за центробежной силы, действующей на ионы. Вторым механизмом раскачки может проявляться даже в пренебрежении цилиндричностью плазмы, скажем при $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{x}$, когда заряды обоих знаков дрейфуют с одной и той же скоростью $V_0 = -cE_0/B_0$. При $\nabla E_0 \neq 0$ эта скорость меняется в пространстве, так что в этом случае плазма представляет собой систему пространственно разделенных потоков, а такая система, например, согласно § 1.6, может быть неустойчивой.

1. **Равновесное состояние.** Пусть в цилиндрической плазме с $T=0$ имеется электрическое поле $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{e}_r$. Это поле вызывает вращение каждой из компонент плазмы со скоростью, определяемой уравнением движения

$$-\frac{V_{0\varphi}^2}{r} = \frac{e}{m} E_0 - V_{0\varphi} \omega_B. \quad (10.1)$$

Отсюда для электронов следует

$$V_{0\varphi}^{(e)} = -cE_0/B_0. \quad (10.2)$$

Для ионов с учетом центробежной силы [левой части (10.1)]

$$V_{0\varphi}^{(i)} = \frac{r\omega_{Bi}}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4e_i E_0}{m_i \omega_{Bi}^2 r}} \right]. \quad (10.3)$$

Предполагается, что при $E_0=0$ ионы не вращаются, поэтому перед корнем в (10.3) взят знак плюс. Если электрическая сила $e_i E_0$, действующая на ионы, направлена от центра цилиндра, то стационарное состояние возможно только при

$$E_0 < m_i \omega_{Bi}^2 r / 4e_i. \quad (10.4)$$

2. **Общее уравнение для потенциальных возмущений холодной плазмы в электрическом поле.** Исходим из гидродинамических уравнений типа (4.1) и (4.6). В случае плазмы цилиндрической симметрии уравнения движения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} -i\Omega V'_r - \frac{2V_0 V'_\varphi}{r} &= \frac{e}{m} E'_r + V'_\varphi \omega_B; \\ -i\Omega V'_\varphi + \frac{V_0 V'_r}{r} + \frac{\partial V_0}{\partial r} V'_r &= \frac{e}{m} E'_\varphi - V'_r \omega_B; \\ -i\Omega V'_z &= \frac{e}{m} E'_z. \end{aligned} \right\} (10.5)$$

Здесь $\Omega = \omega - lV_0/r$; азимутальная зависимость возмущений принята в виде $\exp(i l \varphi)$.

Определяемое отсюда \mathbf{V}' подставляем в уравнение непрерывности

$$-i\Omega n' + ik_z V'_z n_0 + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{V}'_\perp) = 0 \quad (10.6)$$

и вычисляем $n' = n'(\psi)$. Получаемое в результате уравнение Пуассона имеет вид

$$\Delta \psi + \sum_{e,l} \frac{4\pi e^2}{m} \left\{ n_0 \psi \left(\frac{k_z}{\Omega} \right)^2 + \operatorname{div} \left(\frac{n_0 \nabla_\perp \psi}{D} \right) - \frac{e\psi}{\Omega r} \frac{\partial}{\partial r} \left(n_0 \frac{r\omega_B + 2V_0}{rD} \right) \right\} = 0, \quad (10.7)$$

где $D = (\omega_B + 2V_0/r) \left[\omega_B + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_0) \right] - \Omega^2$.

3. Низкочастотная центробежная неустойчивость. Рассмотрим возмущения с $k_z = 0$, $\omega \ll \omega_{Bi}$. Плазму считаем плотной, $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$, электрическое поле малым, $V_0 \ll \ll r\omega_{Bi}$. Тогда из (10.7) следует

$$\operatorname{div}(n_0 \nabla_\perp \psi) + \left\{ \left(\frac{lV_E}{\Omega_e} \right)^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial n_0}{\partial r} + \frac{1}{r\Omega_e} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{n_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_E) \right] \right\} \psi = 0. \quad (10.8)$$

Здесь $V_E = -cE_0/B_0$.

а. Приближение мелкомасштабных возмущений. Пусть $l \gg 1$. При этом из (10.8) получается локальное дисперсионное уравнение, аналогичное уравнению (9.7) для желобковой неустойчивости плазмы в гравитационном поле:

$$\Omega_e^2 - \frac{k_\varphi^2}{k^2} \frac{V_E^2}{r} \kappa_n = 0; \quad \kappa_n \equiv \partial \ln n_0 / \partial r, \quad k_\varphi = l/r. \quad (10.9)$$

Неустойчивость имеет место для плазмы со спадающей по радиусу плотностью, $\kappa_n < 0$. Инкремент колебаний

$$\gamma = (|\kappa_n|/r)^{1/2} V_E k_\varphi / k. \quad (10.10)$$

б. Точное решение уравнения (10.8) для плазмы с гауссовским распределением плотности и однородной угловой скоростью. Рассмотрим частный случай плазмы с $n_0 = \bar{n} \exp(-(r/a)^2)$ и $V_E/r \equiv \Omega_E = \text{const}$. (Величина Ω_E имеет смысл угловой скорости вращения электронов.) При этих предположениях уравнение (10.8) сводится к следующему:

$$\psi'' + \frac{\psi'}{r} - \frac{l^2}{r^2} \psi - \frac{2}{a^2} (r\psi' - v\psi) = 0, \quad (10.11)$$

где

$$v = \frac{\omega_E(\omega_E - 2\omega)}{(\omega - \omega_E)^2}; \quad \omega_E \equiv k_\varphi V_E. \quad (10.12)$$

Уравнение (10.11) совпадает с уравнением (9.42), исследованным в § 9.2. Собственные значения v определяются равенством (9.45). Последнее при v вида (10.12) приводит к следующему уравнению для частоты возмущений:

$$\omega = \omega_E \left\{ 1 + \frac{1}{l+2n} [-1 \pm \sqrt{1 - (l+2n)}] \right\}, \quad (10.13)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

При больших l и n из (10.13) следует

$$\gamma = \frac{\omega_E}{\sqrt{l+2n}} \equiv \frac{l}{a} V_E \frac{1}{\sqrt{l+2n}}, \quad (10.14)$$

что находится в качественном согласии с (10.10), $\gamma \approx \approx V_E/a$.

Интересной особенностью обладают возмущения, соответствующий низшему уровню ($n=0$) моды с $l=1$: их частота, согласно (10.13),

$$\omega = 0 \text{ при } n=0, l=1. \quad (10.15)$$

Низшие уровни других мод ($n=0, l>1$) имеют комплексную частоту $\omega = \text{Re}\omega + i\gamma$, где

$$\text{Re}\omega = \Omega_E(l-1); \quad \gamma = \pm \Omega_E \sqrt{l-1}. \quad (10.16)$$

Влияние теплового движения ионов на центробежную неустойчивость рассмотрено в § 10.3.

§ 10.2. Низкочастотная неустойчивость плазмы с неоднородным профилем скорости

Рассмотрим возмущения с $\omega \ll \Omega_{Bi}$ в приближении плоской симметрии, полагая, что электрическое поле и градиент плотности направлены по x . Низкочастотная центробежная неустойчивость, обсуждавшаяся в § 10.1, при этих условиях невозможна. Покажем, однако, что плазма все же может быть неустойчива, если электрическое поле и связанная с ним дрейфовая скорость частиц $V_E = -cE_0/B_0$ неоднородны.

Уравнение для потенциала возмущений можно получить из уравнения (10.8), сделав в последнем замены $l/r \rightarrow k_y$, $\partial/\partial r \rightarrow \partial/\partial x$ и опустив члены $\sim 1/r$. Результат можно привести к виду

$$\frac{d}{dx} \left[n_0 (\omega - \omega_E)^2 \left(1 + \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega_{pi}^2} \right) \frac{d\varphi}{dx} \right] - k_y^2 n_0 (\omega - \omega_E)^2 \left(1 + \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega_{pi}^2} \right) \varphi = 0, \quad (10.17)$$

где

$$\omega_E = k_y V_E; \quad V_E = -cE_0/B_0; \quad \varphi = \psi/(\omega - \omega_E). \quad (10.18)$$

1. **Необходимое условие неустойчивости плазмы с $\nabla n_0 = 0$, $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{Bi}^2$ (теорема Рэлея).** При $\nabla n_0 = 0$, $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{Bi}^2$ (10.17) сводится к уравнению, идентичному уравнению колебаний плоскопараллельного течения идеальной (невязкой) жидкости:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k_y^2\psi - \psi \frac{\partial^2 V_0/\partial x^2}{V_0 - \omega/k_y} = 0. \quad (10.19)$$

Выясним, при каких условиях частота колебаний может быть комплексной. Помножим обе части равенства (10.19) на ψ^* и проинтегрируем результат по x от x_1 до x_2 , предполагая $\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0$. Тогда при $\omega = \text{Re}\omega + i\gamma$ для мнимой части интеграла имеем

$$\gamma \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V_0/\partial x^2}{(V_0 - \text{Re}\omega/k_y)^2 + (\gamma/k_y)^2} |\psi|^2 dx = 0. \quad (10.20)$$

Видно, что это равенство может удовлетворяться не при любом профиле $V_0(x)$, а лишь в случае, если вторая производная $\partial^2 V_0/\partial x^2$ обращается в нуль где-нибудь между x_1 и x_2 , т. е. при условии

$$\left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} = 0; \quad x_1 < x_0 < x_2. \quad (10.21)$$

Это необходимое условие неустойчивости, называемое также условием Рэлея.

2. **Длинноволновые возмущения. Достаточное условие неустойчивости.** Уравнение (10.19) просто решается для случая возмущений с конечным $W \equiv \omega/k_y$ и $k_y \rightarrow 0$. При этом членом с k_y^2 можно пренебречь, и (10.19) сводится к следующему [ср. с (10.17)]:

$$\frac{d}{dx} \left[(V_0 - W^2) \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi}{V_0 - W} \right) \right] = 0. \quad (10.22)$$

Отсюда

$$\psi = (V_0 - W) \left[C_1 + C_2 \int \frac{dx}{(V_0 - W)^2} \right], \quad (10.23)$$

где C_1, C_2 — некоторые константы.

Учитывая граничные условия $\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0$, с помощью (10.23) получаем дисперсионное уравнение

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(V_0 - W)^2} = 0. \quad (10.24)$$

Если это уравнение имеет комплексные корни, то плазма неустойчива относительно возмущений с $k_y \rightarrow 0$. Это достаточное условие неустойчивости.

3. **Аналогия с пучковой неустойчивостью.** Необходимое и достаточное условие неустойчивости плазмы с монотонным профилем скорости. Пусть $V_0(x)$ — монотонная функция x , так что производная $dV_0(x)/dx$ нигде (между x_1, x_2) не обращается в нуль. Уравнение (10.24) тогда можно представить в виде

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{(dx/dV_0) dV_0}{(V_0 - W)^2} = 0, \quad (10.25)$$

где $V_1 = V_0(x_1)$; $V_2 = V_0(x_2)$. С точностью до обозначений это уравнение совпадает с уравнением длинноволновых ($k_y \rightarrow 0$) ленгмюровских колебаний незамагниченной плазмы с непрерывной функцией распределения частиц по скоростям:

$$\int \frac{f_0(v) dv}{(v - w)^2} = 0; \quad w = \omega/k. \quad (10.26)$$

Роль функции распределения $f_0(v)$ в случае неоднородной плазмы в электрическом поле играет величина

$$\frac{dx(V_0)}{dV_0} \leftrightarrow f_0(v). \quad (10.27)$$

В § 2.7 т. 1 было показано, что уравнение (10.26) может иметь комплексные решения с $\text{Im} \omega > 0$, если $f(v)$ имеет не менее двух максимумов, т. е. по крайней мере один минимум. Используя аналогию (10.27), заключаем, что необходимым условием неустойчивости плазмы в электрическом поле является наличие такого V_0 , для которого

$$d^2x/dV_0^2 = 0 \text{ при } d^3x(V_0)/dV_0^3 > 0. \quad (10.28)$$

Выражая здесь V_0 через x , находим, что условие (10.28) совпадает с условием Рэля (10.21).

В § 2.7 т. 1 методом Найквиста было получено необходимое и достаточное условие неустойчивости возмущений, описываемых уравнением (7.26). Оно имеет вид

$$\int \frac{f_0(v) - f_0(v_0)}{(v - v_0)^2} dv < 0, \quad (10.29)$$

где v_0 — скорость, соответствующая минимуму $f_0(v)$. Этот результат переформулируется на случай электриче-

ского поля так: для неустойчивости плазмы с монотонным профилем скорости необходимо и достаточно, чтобы на интервале между x_1 и x_2 нашлась такая точка x_0 , в которой удовлетворялись бы следующие соотношения:

$$\mathcal{P} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{[V_0(x) - V_0(x_0)]^2} > 0; \quad \left(\frac{d^2V_0}{dx^2} \right)_{x=x_0} < 0 \quad (10.30)$$

(\mathcal{P} — главное значение интеграла).

Интегрируя по частям, это условие можно представить еще так:

$$\frac{1}{(dV_0/dx) [V_0 - V_0(x)]} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2V_0/dx^2}{(dV_0/dx)^3 [V_0 - V_0(x)]} < 0. \quad (10.31)$$

4. **Интервал волновых чисел нарастающих возмущений в плазме с монотонным профилем скорости.** Пусть условие неустойчивости (10.31) удовлетворяется. Можно показать, что при этом должны раскачиваться не только возмущения с $k_y \rightarrow 0$, но и такие, волновые числа которых лежат в интервале $0 \leq k_y^2 \leq k_{\text{макс}}^2$, где $k_{\text{макс}}$ — собственные значения параметра $-\lambda$, определяемые из уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda\psi - U(x)\psi = 0, \quad (10.32)$$

а функция

$$U = \frac{dV_0/dx^2}{V_0 - V_0(x_0)}. \quad (10.33)$$

Предполагается, что $V_0(x)$ положительно и растет с x , так что потенциальная энергия U всюду отрицательна. Доказательство этого утверждения дается в монографии Линя.

§ 10.3. Влияние температуры ионов на низкочастотные неустойчивости

Учет температуры частиц в возмущениях с $k_z = 0$ — это учет эффектов порядка ω^*/ω , где $\omega^* = \mathbf{k} \mathbf{V}_{Li}$, а \mathbf{V}_{Li} — скорость ионных ларморовских токов (см. § 9.2):

$$\mathbf{V}_{Li} = \frac{1}{m_i \omega_{Bi} n_0} [\mathbf{e}_z \nabla p_i]. \quad (10.34)$$

В задачах о колебаниях плазмы в электрическом поле частота колебаний ω порядка $kV_E^{(0)}$. Из условия $V_{Li} > V^{(0)}$ следует критерий существенности ионной температуры

$$T_i \geq eE_0/a. \quad (10.35)$$

1. **Исходные уравнения возмущений плазмы с $T_i \neq 0$.** При исследовании возмущений плазмы с $T_i \neq 0$, $E_0 \neq 0$ и $\nabla T_{oi} = 0$ можно исходить из системы макроскопических уравнений (10.51). При $\partial/\partial z \rightarrow 0$ и в пренебрежении столкновительной вязкостью она принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_E \nabla) n_e &= 0; \\ \frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{V}_E \nabla) n_i + \text{div} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_E \nabla) \right) \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{\mathbf{e}_z}{\omega_R}, \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_L \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Хотя эти уравнения были получены в приближении частых столкновений, они остаются в силе и при $\nu \rightarrow 0$. Линеаризуя эту систему уравнений и используя уравнение Пуассона, для случая цилиндрической симметрии получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\omega - \omega_E)^2 n_0 S r^3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] + \\ + \left[(1 - l^2) (\omega - \omega_E)^2 n_0 S + \omega^2 r \frac{\partial n_0}{\partial r} \right] \varphi = 0, \end{aligned} \quad (10.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S &= 1 + \left(\frac{\omega_{Bi}}{\omega_{pi}} \right)^2 \frac{\omega_i^*}{\omega - \omega_E}; \quad \varphi = \frac{\psi}{r(\omega - \omega_E)}; \\ E &= \frac{l}{r} \frac{cE_0}{B_0}; \quad \omega_i^* = \frac{l}{r} \frac{cT_i}{eB_0} \frac{\partial \ln n_0}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$

Уравнение (10.37) можно понимать как соответствующее обобщение уравнений (10.8), (10.17) на случай $\omega_i^* \neq 0$.

2. **Центробежная неустойчивость и эффект стабилизации в случае плотной плазмы с гауссовским распределением плотности и однородного вращения.** Конечность ионной температуры способствует стабилизации желоб-

ковых возмущений, раскачиваемых центробежным дрейфом ионов. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример, обсуждавшийся в п. 36 § 10.1, полагая $n_0 = \bar{n} \exp[-(r/a)^2]$ и $E_0 = \text{const}$. Тогда получается уравнение (10.11), но с другим значением ν :

$$\nu = \frac{\omega_E^2 + 2\omega_E \Omega + \Omega \omega_i^*}{\Omega(\Omega - \omega_i^*)}; \quad \Omega \equiv \omega - \omega_E. \quad (10.39)$$

Частота возмущений

$$\begin{aligned} \omega = -\omega_E + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{\omega_i^*}{2} (\nu - 1) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[\frac{\omega_i^*}{2} (\nu - 1) - \omega_E \right]^2 - \nu \omega_E} \right\}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Видно, что центробежная неустойчивость не может развиваться, если

$$\left| \frac{\omega_i^*}{\omega_E} (\nu - 1) - 1 \right| > \sqrt{\nu}, \quad \nu = 2, 3, \dots \quad (10.41)$$

В отличие от случая желобковой неустойчивости, вызываемой гравитационным дрейфом (§ 9.2), где мода $l=1$ неустойчива даже при больших ω_i^* , здесь оказываются стабилизированными возмущения со всеми l .

3. **Подавление неустойчивости, обусловленной неоднородностью профиля скорости.** При достаточно большой температуре ионов происходит подавление не только центробежной неустойчивости, но также и неустойчивости из-за неоднородности профиля скорости, обсуждавшейся в § 10.2. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим возмущения с $k_y \rightarrow 0$. С помощью (10.37) получаем уравнение, аналогичное (10.22), но с конечным V_L/V_0 :

$$\frac{d}{dx} \left\{ [(V_0 - W)^2 - V_L^2] \frac{d\psi}{dx} \right\} = 0. \quad (10.42)$$

Отсюда следует дисперсионное уравнение типа (10.24):

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(V_0 - W)^2 - V_L^2} = 0. \quad (10.43)$$

Видно, что при достаточно большом V_L члены с V_0 можно опустить. В отсутствие же электрического поля, как следует из § 9.2, неустойчивость не развивается.

§ 10.4. Ионно-циклотронные и высокочастотные неустойчивости

1. Раскачка центробежным дрейфом ионно-циклотронных колебаний плазмы с $\omega_{pi} \leq \omega_{Bi}$. Если отношение $V_E/r\omega_{Bi}$ не слишком мало, то наряду с низкочастотными возмущениями в плазме могут раскачиваться также возмущения с $\omega \geq \omega_{Bi}$ — циклотронные и высокочастотные. В п. 1 рассмотрим раскачку циклотронных возмущений, а в п. 2 — высокочастотных.

Будем считать возмущения мелкомасштабными и перейдем от (10.7) к локальному дисперсионному уравнению. При $\omega \approx \omega_{Bi}$ оно имеет вид

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_\phi V_{0i})^2 - \omega_{Bi}^2} - \left(\frac{k_z}{k}\right)^2 \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_\phi V_{0e})^2} = 0. \quad (10.44)$$

Отсюда находим, что колебания типа (7.44) раскачиваются, если $k_\phi (V_{0i} - V_{0e}) \approx \omega_{Bi}$, т. е. при

$$\frac{k_\phi}{r} \frac{V_E^2}{\omega_{Bi}^2} \approx 1, \quad (10.45)$$

При $\omega_{pi} < \omega_{Bi}$ инкремент нарастания порядка ω_{pi} .

2. **Высокочастотная центробежная неустойчивость плазмы с $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$.** Для мелкомасштабных возмущений с $\omega_{Bi} < \omega < \omega_{Be}$ из (10.7) вытекает локальное дисперсионное уравнение

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} \cos \theta\right)^2 + \frac{l}{r} \frac{\kappa_n \omega_{pe}^2}{\Omega_e k_\perp^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\left[\Omega_e - \frac{l}{r} (V_{0i} - V_{0e})\right]^2} = 0; \quad \Omega_e \equiv \omega - \frac{l}{r} V_E. \quad (10.46)$$

С точностью до замены $\Omega_e \rightarrow \omega$, $V_{0i} - V_{0e} \rightarrow V_{0i}$ оно аналогично уравнению (5.63).

Условия неустойчивости и инкременты можно найти, используя результаты § 11.1 т. 1 и § 2.5 настоящего тома.

§ 10.5 Неустойчивость электронного облака с немонотонной плотностью (диокотронная неустойчивость)

Для чисто электронных возмущений с $\omega \ll \omega_{Be}$, $k_z = 0$ и $\nabla n_0 \parallel \mathbf{x}$ из (10.7) следует

$$\Delta \psi - \frac{4\pi^2 k_y}{m\omega_B} \frac{\partial n_0 / \partial x}{\omega - k_y V_0} \psi = 0. \quad (10.47)$$

В отсутствие ионов, компенсирующих пространственный заряд электронов, равновесная плотность электронов однозначно связана с полем E_0 :

$$\partial E_0 / \partial x = -4\pi n_0. \quad (10.48)$$

Выражая отсюда n_0 через E_0 и далее через $V_0 \equiv cE_0/B_0$ и подставляя результат в (10.47), получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k_y^2 \psi + \frac{\partial^2 V_0 / \partial x^2}{\omega / k_y - V_0} \psi = 0. \quad (10.49)$$

Это уравнение в точности совпадает с (10.19), хотя оно получено при иных предположениях. Основываясь на тождественности этих двух уравнений и на результатах § 10.2, заключаем, что некомпенсированное электронное облако неустойчиво относительно возмущений с достаточно малыми k_y , если удовлетворяется условие Рэлея (7.21). Поскольку $n_0 \sim \partial V_0 / \partial x$, то условие неустойчивости означает, что распределение плотности должно иметь хотя бы один максимум:

$$(\partial n_0 / \partial x)_{x=x_0} = 0. \quad (10.50)$$

Неустойчивость пространственно-неоднородного электронного облака часто называют диокотронной,

Библиографический обзор к гл. 10

1. **Линь Ц. Ц.** Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
Здесь изложена теория устойчивости плоскопараллельных течений обычной жидкости. Здесь же см. о теореме Рэлея, обсуждавшейся в § 10.2.
2. **Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.** Устойчивость плазмы. — «Успехи физ. наук», 1961, т. 73, с. 701.
Рассматривается низкочастотная центробежная неустойчивость, § 10.1.
3. **Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N.** Finite Larmor radius stabilization of «weakly» unstable confined plasmas. — «Nucl. Fusion», Suppl., 1962, v. 1, p. 143.
Исследуется влияние конечности ларморовского радиуса ионов на низкочастотную центробежную неустойчивость.
4. **Rosenbluth M. N., Simon A.** Necessary and sufficient condition for stability of plane parallel inviscid flow. — «Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 557.
Получено необходимое и достаточное условие плоскопараллельного невязкого течения жидкости с монотонным профилем скорости. Результаты этой работы приведены в § 10.2.
5. **Rosenbluth M. N., Simon A.** Finite Larmor radius equations with nonuniform electric fields and velocities. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1300.
Получены и исследованы уравнения низкочастотных возмущений с $k_z=0$ с учетом конечности ларморовского радиуса ионов и неоднородности электрического поля для случаев плоской и цилиндрической симметрии, § 10.1—10.3.
6. **Михайловский А. Б., Цыпин В. С.** Высокочастотная неустойчивость плазмы, находящейся в радиальном электрическом и продольном магнитных полях. — «Письма ЖЭТФ», 1966, т. 3, с. 247.
Исследуются высокочастотные неустойчивости в сильнонеоднородной плазме с большим электрическим полем, § 10.4.
7. **Байков И. С., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.** Влияние электрического поля на спектр колебаний неоднородной плазмы. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 318.
Обсуждается роль центробежного эффекта в косых возмущениях ($k_z \neq 0$) бесстолкнительной плазмы. Показано, что качественно этот эффект проявляется так же, как и действие гравитационной силы, направленной против градиента плотности ($g > 0$), ср. с § 9.5.
8. **Chen F. F.** Microinstability and shear stabilization of a low- β , rotating, resistive plasma. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 965.
Исследуются центробежные неустойчивости столкнительной плазмы в радиальном электрическом поле как при $k_z=0$, так и при $k_z \neq 0$. Обсуждается физический смысл асимметрии критерия стабилизации, 10.41. Показано, что это обусловлено силой Кориолиса. Исследуется влияние вращения плазмы на градиентно-диссипативные неустойчивости (последние при $E_r=0$ обсуждались в § 8.2).
9. **Байков И. С.** О стабилизации гидродинамических дрейфовых

- колебаний во вращающейся неоднородной цилиндрической плазме. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 1137.
Дальнейшее развитие работы [7], рассмотрены возмущения первых азимутальных мод.
10. **Gould R. W.** Space charge effects in beam-type magnetrons. — «J. Appl. Phys.», 1957, v. 28, p. 599.
11. **Levy R. H.** Diocotron instability in a cylindrical geometry. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1288.
12. **Knauper W.** Diocotron instability in plasmas and gas discharges. — «J. Appl. Phys.», 1966, v. 37, p. 602.
13. **Levy R. H., Callen J. D.** Diocotron instability in a quasitoroidal geometry. — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2298.
14. **Levy R. H.** Two new results in cylindrical diocotron theory. — «Phys. Fluids», 1968, v. 11, p. 920.
В работах [10—14] исследуется диокотронная неустойчивость, § 10.5.
15. **Wilhelm H. E.** Stability of a rotating plasma. — «Nucl. Fusion», 1962, v. 2, p. 6.
В рамках идеальной гидродинамики рассматривается центробежная неустойчивость. Учитывается роль окружающего нейтрального газа.
16. **Арсенин В. В.** Желобковая неустойчивость разреженной неоднородной плазмы в неоднородном электрическом поле. — «Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 152.
17. **Cooperative effects in tenuous energetic plasmas confined by a magnetic mirror-field.** — «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1472. Auth.: C. C. Damm, J. H. Foote, A. H. Furth, A. L. Gardner, F. J. Gordon, A. L. Hunt, R. F. Post.
18. **Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П.** О желобковой неустойчивости в некомпенсированной плазме. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 167, с. 1032.
19. **Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Чечина А. А.** Желобковая неустойчивость в разреженной некомпенсированной плазме. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 1205.
20. **Тимофеев А. В.** Влияние резонансов между волной и невозмущенным движением плазмы на устойчивость желобковых колебаний. — «Ядерный синтез», 1966, т. 6, с. 93.
21. **Rosenbluth M. N., Simon A.** Flute instability at low density. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 726.
22. **Тимофеев А. В.** О желобковых колебаниях разреженной плазмы при наличии некомпенсированного пространственного заряда. — «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 1787.
23. **Timofeev A. V.** The effect of an electric field on flute oscillations of a tenuous plasma. — «Plasma Physics», 1968, v. 10, p. 235.
В работах [16—23] исследуются желобковые возмущения разреженной плазмы, $\omega_{pi} \ll \omega_{ci}$, в электрическом поле.
24. **Stringer T. E., Schmidt G.** Flute instability in the presence of non-uniform electric fields. — «Plasma Physics», 1967, v. 9, p. 53.
Обсуждаются низкочастотные неустойчивости плазмы с произвольным ω_{pi}/ω_{ci} . Обращается внимание на аналогию этих неустойчивостей с неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца.

Глава 11

СЛАБОИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА

§ 11.1. Низкочастотная неустойчивость
из-за градиента плотности

При малой степени ионизации плазмы электронная температура, как правило, превосходит ионную, $T_e \gg T_i$. При этом степень неоднородности плазмы характеризуется отношением ρ_0/a , где $\rho_0 = (T_e/m_i \omega_{Bi}^2)^{1/2}$ — эффективный ларморовский радиус ионов; a — характерный размер неоднородности плазмы. Здесь будем полагать, что ρ_0/a достаточно мало (слабо неоднородная плазма). Тогда можно ограничиться исследованием только низкочастотных возмущений, $\omega \ll \omega_{Bi}$ (о возмущениях с $\omega \gg \omega_{Bi}$ в плазме с конечным ρ_0/a см. § 11.2).

Предполагаем, что кинетические эффекты не важны. Это оправдывается при достаточно большой частоте столкновений электронов с нейтральными частицами ($\nu_e > k_z v_{Te}$). Благодаря этому в качестве исходной можно принять систему гидродинамических уравнений. Линсаризованные уравнения гидродинамики при $\mathbf{E}_0 = 0$ (в отсутствие статического электрического поля) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega n'_e + ik_z V'_{ze} n_0 + \operatorname{div}(n_e \mathbf{V}'_{\perp e})' &= 0; \\ -i\omega n'_i + ik_z V'_{zi} n_0 + \operatorname{div}(n_i \mathbf{V}'_{\perp i})' &= 0; \\ 0 = -\frac{e_e}{m_e} \mathbf{E}' - \frac{T_{0e}}{m_e} (\nabla \ln n_e)' + [\mathbf{V}'_e \omega_{Be}] - \nu_e \mathbf{V}'_e; \\ -i\omega \mathbf{V}'_i &= \frac{e_i}{m_i} \mathbf{E}' + [\mathbf{V}'_i, \omega_{Bi}] - \nu_i \mathbf{V}'_i. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

Предполагается, что $\nabla T_{0e} = 0$, $\nabla T_{0i} = 0$, $T'_c = 0$. Кроме того, здесь пренебрежено инерцией электронов, что законно при $\omega < \nu_e$.

Роль магнитного поля B_0 существенна, если $\nu_e < \omega_{Be}$. При этом условии из электронного уравнения движения следует

$$\mathbf{V}'_{\perp e} = \mathbf{V}'_E - \frac{T_e}{m_e \omega_{Be}} [(\nabla \ln n_e)', \mathbf{e}_z] +$$

$$+ \frac{\nu_e (e_e \mathbf{E}'_{\perp} - T_e (\nabla \ln n_e)')}{m_e \omega_{Be}^2}; \quad V'_{ze} = -\frac{ik_z}{\nu_e m_e} \left(\frac{n'_e}{n_0} + \frac{e_e \Psi'}{T_e} \right), \quad (11.2)$$

где штрих, как и выше, означает возмущенную часть; индекс 0 у T_{0e} опущен, $\mathbf{V}'_E = c[\mathbf{E}', \mathbf{e}_z]/B_0$.

Предполагая $\omega \ll \omega_{Bi}$, получаем аналогичные уравнения для ионов:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}'_{\perp i} &= \mathbf{V}'_E - \frac{i(\omega + i\nu_i) e_i \mathbf{E}'_{\perp}}{m_i \omega_{Bi}}; \\ V'_{zi} &= \frac{e_i k_z \Psi'}{m_i (\omega + i\nu_i)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

После подстановки (11.2) и (11.3) в соответствующие уравнения непрерывности (11.1) и использования условий квазинейтральности ($n'_e = n'_i$) получаем следующее дисперсионное уравнение для возмущений с $k_{\perp} a \gg 1$:

$$(k_{\perp} \rho_0)^2 \left(1 + \frac{i\nu_i}{\omega} \right) - \frac{k_z^2 T_e}{m_i \omega (\omega + i\nu_i)} + \frac{i\Delta_e (\omega - \omega_{ne})}{\omega (\omega + i\Delta_e)} = 0. \quad (11.4)$$

Здесь, как и в предыдущих главах, $\omega_{ne} = k_y \nu_n c T_e / e_e B_0$, а Δ_e означает

$$\left. \begin{aligned} \Delta_e &= \Delta_{\perp e} + \Delta_{\parallel e}; \quad \Delta_{\perp e} \equiv (k_{\perp} \rho_e)^2 \nu_e; \\ \Delta_{\parallel e} &\equiv k_z^2 T_e / m_e \nu_e; \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

ρ_e — ларморовский радиус электронов.

При $\omega > \nu_i$ и $\Delta_{\parallel e} < \Delta_{\perp e}$ уравнение (11.5) сводится к исследованному в § 8.2 дисперсионному уравнению (7.79) для полностью ионизованной плазмы (с заменой $\nu_e \rightarrow \nu_{ei}$). При этих условиях имеет место раскачка колебаний, характеризующаяся соотношениями п. 1 § 8.2.

Одно из отличий (11.5) от (7.79) проявляется при достаточно малых k_z , когда $\Delta_{\perp e} > \Delta_{\parallel e}$, т. е. при

$$\cos \theta \equiv k_z / k \lesssim \nu_e / \omega_{Be}. \quad (11.6)$$

Это отличие существенно, если условие (11.6) удовлетворяется при $\cos \theta = (\cos \theta)_{\text{опт}}$, где $(\cos \theta)_{\text{опт}}$ определено соотношением (8.12). Отсюда вытекает, что картина не-

устойчивостей слабоионизованной плазмы должна строиться заново, если

$$\omega_{ne}/v_e < m_e/m_i. \quad (11.7)$$

При $k_{\perp} \approx 1/a$ это неравенство означает

$$(\rho_0/a)^2 < v_e/\omega_{Be}. \quad (11.8)$$

Считая (11.7) (или 11.8) выполненным и пренебрегая в (11.5) членами с Δ_e , а также вкладом продольного движения ионов, получаем

$$(\omega + iv_i)(\omega + iv_e k_{\perp}^2 \rho_e^2) + i \frac{m_e}{m_i} v_e (\omega - \omega_{ne}) = 0. \quad (11.9)$$

В силу (11.7) здесь величину $m_e/m_i v_e$ следует считать большим параметром. Поэтому приближенное решение (11.9) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &= \omega_{ne}; \\ \gamma &= (m_i/m_e v_e) (\omega_{ne}^2 - v_i v_e k_{\perp}^2 \rho_e^2). \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Неустойчивость имеет место при

$$v_i/v_e < (\lambda_e/a)^2, \quad (11.11)$$

где $\lambda_e = v_{Te}/v_e$ — длина свободного пробега электронов. Инкремент неустойчивости мал по сравнению с градиентной частотой ω_{ne} .

Таким образом, в условиях, когда проявляются специфические свойства слабоионизованной плазмы, инкремент неустойчивости оказывается меньшим, чем в случае полностью ионизованной плазмы.

§ 11.2. Высокочастотная неустойчивость из-за градиента плотности

Теперь, в отличие от § 11.1, рассмотрим плазму с $\rho_0/a > 1$. При этом, как и в случае бесстолкновительной плазмы (см. § 5.2), основную роль играют неустойчивости с $\omega > \omega_{Bi}$.

Выражения (11.2) для V'_e остаются в силе и при $\omega > \omega_{Bi}$, тогда как для ионной скорости из (11.1) вместо (11.3) теперь следует

$$V'_i = e_i k \psi' / m_i (\omega + iv_i). \quad (11.12)$$

Дисперсионное уравнение для возмущений с $\omega > \omega_{Bi}$ имеет вид

$$\frac{\omega_{ne} + i\Delta_e}{\omega + i\Delta_e} - \frac{k^2 T_e}{m_i \omega (\omega + iv_i)} = 0. \quad (11.13)$$

Это уравнение будем анализировать следующим приближенным путем. Учитывая, что неустойчивость может иметь место лишь при $v_i < \omega \leq \omega_{ne}$, и пренебрегая в (11.13) членами порядка ω/ω_{ne} и v_i/ω , имеем

$$\omega^2 = \frac{k^2 T_e}{m_i} \frac{i\Delta_e}{\omega_{ne} + iv_e}. \quad (11.14)$$

Отсюда заключаем, что при фиксированном $k_{\perp} \geq k_z$ инкремент достигает максимума, по порядку величины равного

$$\gamma \approx \operatorname{Re} \omega \approx k (T_e/m_i)^{1/2} \quad (11.15)$$

при $\Delta_e \approx \omega_{ne}$, что соответствует волновому числу

$$k_z \approx (k_y \kappa)^{1/2} (v_e/\omega_{Be})^{1/2}. \quad (11.16)$$

Решение (11.15) удовлетворяет требованию $\omega < \omega_{ne}$, если $\rho_0/a > 1$, что находится в соответствии с критерием неустойчивости бесстолкновительной плазмы (ср. с § 5.2). Предположение о малости ионного затухания, $v_i/\omega < 1$, с учетом $\omega > \omega_{Bi}$ приводит к достаточному условию $v_i/\omega_{Bi} < 1$.

Применимость решения (11.15) и (11.16) ограничена также условием столкновительности электронов, $v_e > k_z v_{Te}$, которое в данном случае означает

$$\omega_{ne} < v_e. \quad (11.17)$$

В обратном предельном случае, когда $\omega_{ne} > v_e$, неустойчивость является существенно кинетической и описывается соотношениями § 5.2. Переходная область $\omega_{ne} \approx v_e$ была рассмотрена А. В. Тимофеевым.

§ 11.3. Токово-конвективная неустойчивость

Рассмотрим влияние на устойчивость слабо-неоднородной плазмы ($\rho_0 < a$) продольного электрического поля $E_0 \parallel B_0$. Это поле вызывает продольный дрейф электронов со скоростью

$$V_{oe} = e_e E_0 / m_e v_e. \quad (11.18)$$

Возмущения в этом случае описываются системой уравнений типа (11.1), но с заменой в электронном уравнении непрерывности $\omega \rightarrow \omega - k_z V_{0e}$. Вместо дисперсионного уравнения (11.4) теперь получится (продольным движением ионов пренебрегаем)

$$(k\rho_0)^2 \left(1 + \frac{iv_i}{\omega}\right) + \frac{k_z V_{0e} \omega_{ne} + i\Delta_e (\omega - \omega_{ne})}{\omega (\omega + i\Delta_e - k_z V_{0e})} = 0. \quad (11.19)$$

При $v_e < (m_i/m_e)\omega_{ne}$ [условие, обратное (11.7)] влияние продольного тока существенно, если выполняется критерий типа (8.47) с заменой $v_{Ti} \rightarrow (T_e/m_i)^{1/2}$, $\rho_i \rightarrow \rho_0$, $v_{ei} \rightarrow v_e$ и с учетом того, что теперь выражение ω^* определяется градиентом плотности. Инкремент возмущений при этом велик по сравнению с ω_{ne} . При не слишком малых k_z , когда не важен первый член в левой части (11.19), он равен

$$\gamma = \frac{k_y}{k_z} \frac{v_e}{\omega_{Be}} \kappa_n V_0. \quad (11.20)$$

Это токово-конвективная неустойчивость Кадомцева — Недоспасова.

С уменьшением k_z инкремент ведет себя так же, как и в случае полностью ионизованной плазмы (см. § 8.6).

Теперь рассмотрим плазму, для которой удовлетворяются условия (11.7) и (11.8). Вместо (11.20) имеем

$$\gamma = \frac{k_y}{k_z} \frac{v_e}{\omega_{Be}} \frac{\kappa_n V_0}{1 + (k_\perp v_e / k_z \omega_{Be})^2}. \quad (11.21)$$

В этом случае инкремент достигает максимума, меньшего чем (8.50):

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \kappa_n V_0. \quad (11.22)$$

При этом $k_z/k_\perp \approx v_e/\omega_{Be}$. При дальнейшем уменьшении k_z инкремент падает, а затем переходит в (11.10).

§ 11.4. Гравитационно-диссипативная неустойчивость

Как и в гл. 9, будем считать, что на ионы действует сила тяжести $g \parallel x$, моделируя тем самым кривизну силовых линий. В ионных уравнениях (11.1) в

этом случае следует сделать замену $\omega \rightarrow \omega + gk_y/\omega_B$. При $\omega \gg gk_y/\omega_B$ дисперсионное уравнение сводится к следующему:

$$(\omega + iv_i)(\omega + i\Delta_e) - g\kappa (k_y/k_\perp)^2 - i \frac{m_e}{m_i} v_e (\omega - \omega_{ne}) = 0. \quad (11.23)$$

Это уравнение описывает желобковую неустойчивость, рассмотренную в § 9.1, если

$$|g\kappa|^{1/2} > (v_i, (m_e/m_i)v_e, (k_\perp \rho_e)^2 v_e). \quad (11.24)$$

При $v_i < V|g\kappa| < m_e v_e/m_i$ имеет место гравитационно-диссипативная неустойчивость, аналогичная рассмотренной в § 9.6. Ее инкремент

$$\gamma = \frac{|g\kappa|}{\Delta_e + m_e v_e/m_i}. \quad (11.25)$$

В случае сильностолкновительной плазмы [$\omega < (v_i, \Delta_e)$] из (11.23) следует

$$\omega = \omega_{ne} - i \frac{m_i}{m_e v_e} (v_i v_e k_\perp^2 \rho_e^2 + g\kappa). \quad (11.26)$$

Отсюда находим, что при $g\kappa < 0$ плазма неустойчива, если

$$|g\kappa| > v_i v_e (k_\perp \rho_e)^2. \quad (11.27)$$

Это при $g \approx T_e/m_i R$ и $k_\perp \approx a^{-1}$ по порядку величины означает

$$\frac{a}{R} > \frac{v_e}{\omega_{Be}} \frac{v_i}{\omega_{Bi}}. \quad (11.28)$$

Инкремент неустойчивости порядка

$$\gamma \approx \frac{|g\kappa| m_i}{m_e v_e} \approx \frac{T}{m_e v_e a R}. \quad (11.29)$$

Он мал по сравнению с инкрементом желобковой неустойчивости (9.8) как $V|g\kappa| m_i/m_e v_e$.

§ 11.5. Неустойчивость слабоионизованной плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях

Причиной неустойчивости неоднородной слабоионизованной плазмы может быть поперечное электрическое поле $E_0 \perp B_0$. Вследствие столкновений с нейтраль-

ными частицами скорость дрейфа заряженной частицы, движущейся в скрещенных полях $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$, отличается от $\mathbf{V}_E \equiv c[\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0]/B_0^2$ множителем $[1 + (v/\omega_B)^2]^{-1}$, где величины v и ω_B относятся к ионам или электронам. При $\mathbf{E} \parallel \mathbf{x}, \mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$ относительная скорость ионов и электронов, обусловленная этим эффектом, равна

$$V_{oiy} - V_{oe y} = \frac{cE_{0x}}{B_0} \xi, \quad (11.30)$$

где

$$\xi = \left[\left(\frac{v}{\omega_B} \right)_i^2 - \left(\frac{v}{\omega_B} \right)_e^2 \right] / \left[\left[1 + \left(\frac{v}{\omega_B} \right)_i^2 \right] \left[1 + \left(\frac{v}{\omega_B} \right)_e^2 \right] \right]. \quad (11.31)$$

Согласно (9.1), такая же разность скоростей возникла бы в пренебрежении столкновениями, но при воздействии на плазму гравитационного поля g , равного

$$g = g_{эф} = - \frac{e_i E_{0x}}{B_0} \xi. \quad (11.32)$$

При $g_{эф} \kappa < 0$ ($\kappa = \partial \ln n_0 / \partial x$) поле $g_{эф}$ делает плазму более неустойчивой. Поэтому с учетом (11.32) и того, что $\xi > 0$, получаем, что электрическое поле играет дестабилизирующую роль, если

$$E_{0x} \partial \ln n_0 / \partial x > 0. \quad (11.33)$$

Дисперсионное уравнение для мелкомасштабных возмущений при $E_0 \neq 0$ получаем так. Сначала находим поперечную скорость электронов $\mathbf{V}_e \equiv \mathbf{V}_{oe} + \mathbf{V}'_e$, исходя из уравнения движения в форме (11.1) с опущенным штрихом. В пренебрежении членами порядка $(v_e/\omega_{Be})^2$ выражение для \mathbf{V}_e определяется первым равенством (11.2) без штриха. Этот результат вместе с выражением (11.2) для \mathbf{V}'_{ze} подставляем в электронное уравнение непрерывности (11.1) и находим возмущенную плотность электронов:

$$n'_e = - \frac{e_e \psi n_0}{T_{oe}} \frac{\omega_{ne} + i\Delta_e}{\omega - \omega_E + i\Delta_e}, \quad (11.34)$$

где $\omega_E = k_y V_{yE} \equiv -k_y c E_{0x} / B_0$, а Δ_e было введено в § 11.1.

При вычислении ионной поперечной скорости исходим из ионного уравнения движения, аналогичного

(11.1), но в котором опущен штрих, а вместо $(-i\omega \mathbf{V}'_i)$ в левой части стоит $d\mathbf{V}_i/dt$. Решаем это уравнение, полагая левую часть малой, а отношение v_i/ω_{Bi} — конечным. Тогда

$$\mathbf{V}_{\perp i} = \left(\mathbf{V}_E + \frac{v_i}{\omega_{Bi}^2} \frac{e_e}{m_i} \mathbf{E}_{\perp} \right) \left[1 + \left(\frac{v_i}{\omega_{Bi}} \right)^2 \right]^{-1} + \delta \mathbf{V}_{\perp i}. \quad (11.35)$$

Здесь член $\delta \mathbf{V}_{\perp i}$ соответствует инерции ионов:

$$\delta \mathbf{V}_{\perp i} = \left\{ \frac{e_i}{m_i} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \left(1 - \frac{v_i^2}{\omega_{Bi}^2} \right) - 2v_i \frac{d\mathbf{V}_E}{dt} \right\} / \omega_{Bi}^2 \left[1 + \left(\frac{v_i}{\omega_{Bi}} \right)^2 \right]^2. \quad (11.36)$$

Полная производная d/dt означает $\partial/\partial t + (\mathbf{V}_{\perp i}^{(0)} \nabla)$, где $\mathbf{V}_{\perp i}^{(0)}$ — первый член правой части (11.35).

Выражения (11.35) и (11.36) подставляем в ионное уравнение непрерывности и производим линеаризацию. Возмущенная плотность ионов равна

$$n'_i = \frac{cn_0}{B_0} \psi \left\{ \frac{\kappa k_y + i(v_i/\omega_{Bi}) k_{\perp}^2}{\omega - \omega_{Ei}} + \frac{k_{\perp}^2 (1 - v_i^2/\omega_{Bi}^2)}{\omega_{Bi} (1 + v_i^2/\omega_{Bi}^2)} \right\} \left(1 + \frac{v_i^2}{\omega_{Bi}^2} \right)^{-1}, \quad (11.37)$$

где $\omega_{Ei} = \omega_E (1 + v_i^2/\omega_{Bi}^2)^{-1}$.

Приравняв правые части (11.34) и (11.37), получим дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_{ne} + i\Delta_e}{\omega - \omega_E + i\Delta_e} - \frac{\omega_{ne} - iv_i k_{\perp}^2 \rho_0^2}{(\omega - \omega_{Ei}) (1 + v_i^2/\omega_{Bi}^2)} + [k_{\perp}^2 \rho_0^2 (1 - v_i^2/\omega_{Bi}^2)] / (1 + v_i^2/\omega_{Bi}^2)^2 = 0. \quad (11.38)$$

В приближении $v_i/\omega_{Bi} < 1$ из (11.38) следует:

$$\frac{i\Delta_e (\omega - \omega_E - \omega_{ne})}{(\omega - \omega_E) (\omega - \omega_E + i\Delta_e)} + \left(\frac{v_i}{\omega_{Bi}} \right)^2 \frac{\omega \omega_{ne}}{(\omega - \omega_E)^2} + k_{\perp}^2 \rho_0^2 \left(1 + \frac{iv_i}{\omega - \omega_E} \right) = 0. \quad (11.39)$$

Рассмотрим возмущения, соответствующие желобковой неустойчивости бесстолкновительной плазмы в поле тяжести. Полагаем члены с Δ_c и $v_i/(\omega - \omega_E)$ малыми. Тогда из (11.39) следует

$$(\omega - \omega_E)^2 - \frac{\kappa k_y}{k_\perp^2} \frac{\omega v_i^2}{\omega_{Bi}} = 0. \quad (11.40)$$

Решения этого уравнения соответствуют неустойчивости, если выполнено условие (11.33) и если E_{0x} не слишком мало:

$$eE_{0x} > \frac{1}{4} m_i \kappa (v_i/k_\perp)^2. \quad (11.41)$$

При этом инкремент

$$\gamma \approx \frac{v_i}{\omega_{Bi}} \left| \frac{e}{m_i} E_{0x} \kappa \right|^{1/2}. \quad (11.42)$$

Этот результат вытекает также из формулы для инкремента желобковой неустойчивости $\gamma \approx |g\kappa|^{1/2}$, если в нее вместо g подставить $g_{\text{эф}}$, определенное соотношением (11.32). Условие неустойчивости (11.41) для возмущений с $k_\perp \approx 1/a$ по порядку величины означает

$$\frac{c\psi_0}{T_{0e}} > \frac{T_{0i}}{T_{0e}} \frac{a^2}{\lambda_i^2}, \quad (11.43)$$

где ψ_0 — разность потенциалов статического поля на размере плазмы; $\lambda_i = v_{Ti}/v_i$ — длина свободного пробега иона.

Библиографический обзор к гл. 11

Слабонеоднородная плазма без продольного тока

1. Тимофеев А. В. О диссипативной неустойчивости слабоионизованной неоднородной плазмы в однородном внешнем магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1963, т. 33, с. 909.
Установлено, что слабоионизованная плазма с неоднородной плотностью неустойчива. Рассмотрен случай раскачки колебаний с $k_z = 0$.
2. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Ораевский В. Н. О турбулентной диффузии слабоионизованной замагниченной плазмы.—«Журн. прикл. мех. и техн. физ.», 1963, т. 6, с. 29.
Рассмотрена раскачка колебаний с $k_z \neq 0$, см. также позицию [6].

3. Woo J. C., Rose D. J. Universal instability of a resistive plasma column.—«Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 104.
Развиваются идеи, сходные с высказанными в работе [1], о возможности развития неустойчивости в бестоковой плазме. Получен критерий неустойчивости довольно общего типа.
4. Байков И. С., Рухадзе А. А. Возбуждение дрейфовых колебаний в слабоионизованной плазме.—«Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 1619.
Учитываются возмущения температуры и градиента температуры.
5. Popović M., Melchior H. Drift waves in a weakly ionized plasma.—«Plasma Phys.», 1968, v. 10, p. 495.
Проводится численный анализ «дрейфовых» волн в слабоионизованной плазме с учетом вязкости ионов.

Сильнонеоднородная плазма без продольного тока

6. Тимофеев А. В. О неустойчивости газового разряда в магнитном поле без продольного тока.—«Докл. АН СССР», 1963, т. 152, с. 84.
Обсуждается высокочастотная неустойчивость слабоионизованной плазмы. Приведены критерии неустойчивости.
7. Фридман А. М. О явлениях критического магнитного поля и аномальной диффузии в слабоионизованной плазме.—«Докл. АН СССР», 1964, т. 154, с. 567.
Исследуется высокочастотная неустойчивость, приводится выражение для инкремента.

Токово-конвективная неустойчивость

8. Kadomtsev V. B., Nedospasov A. V. Instability of the positive column in a magnetic field and the «anomalous» diffusion effect.—«J. Nucl. Energy», 1960, v. C1, p. 230.
Установлена возможность раскачки током возмущений винтового типа. Производится расчет границы неустойчивости.
9. Кадомцев Б. Б. Конвекция плазмы положительного столба в магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 1273.
10. Hoh F. G., Lehnert V. Screw instability of a plasma column.—«Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 7, p. 75.
11. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы.—В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, с. 132.
В работах [9—11] обсуждается, в частности, физическая интерпретация токово-конвективной неустойчивости.
12. Hoh F. G. Screw instability of a plasma column.—«Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 22.
13. Guest G., Simon A. Instability in low-pressure plasma diffusion experiments.—«Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 503.
14. Johnson R. R., Jerde D. A. Instability of a plasma column in a longitudinal magnetic field.—«Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 988.
15. Ivash E. V. Validity of the Kadomtsev—Nedospasov approxima-

- tion for a simple geometry plasma.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 699.
16. Holter F., Johnson R. R. Excitation of the $m=2$ mode by the helical instability.—«Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 622.
17. Huchital D. A., Holt E. H. Modes of the Kadomtsev plasma instability.—«Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 677.
В работах [12—17] производится дальнейшая детализация теории Кадомцева — Недоспасова и обсуждаются пределы применимости этой теории.
18. Белоусова Л. Е. Полный положительный столб в продольном магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 892.
Исследуется неустойчивость полого цилиндрического столба.
19. Reynolds J. F., Holt E. F. Shear stabilization of a collision-dominated plasma.—«Phys. Rev.», 1968, v. 175, p. 205.
Исследуется влияние шири на токово-конвективную неустойчивость.

Гравитационно-диссипативная неустойчивость

20. Тимофеев А. В. О конвекции слабоионизованной плазмы в неоднородном внешнем магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1963, т. 33, с. 776.
Указано на возможность такого типа неустойчивости и найдены ее границы.

Плазма в скрещенных электрическом и магнитном полях

21. Simon A. Instability of a partially ionized plasma in crossed electric and magnetic fields.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 382.
22. Hoh F. G. Instability of penning-type discharge.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 1184.
В работах [21, 22] указано на возможность развития неустойчивости за счет различия дрейфов ионов и электронов в скрещенных полях. В работе [21] обсуждается механизм неустойчивости.
23. Morse D. L. Low-frequency instability of partially ionized plasma.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1339.
Проводится численный анализ неустойчивости в скрещенных полях.

Некоторые другие вопросы устойчивости неоднородной слабоионизованной плазмы обсуждаются в работах:

24. Тимофеев А. В. О неустойчивости слабоионизованной неравномерно нагретой плазмы в однородном магнитном поле.—«Журн. техн. физ.», 1962, т. 32, с. 1297.
Исследуется неустойчивость плазмы с неоднородной температурой.
25. Владимиров В. В. Неустойчивость положительного столба в магнитном поле при низком давлении.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 175.

- Рассматривается высокочастотная неустойчивость плазмы в радиальном электрическом поле с учетом процессов ионизации и ускорения ионов.
26. Михайловский А. Б., Погуце О. П. Кинетическая теория колебаний неоднородной плазмы со столкновениями.—«Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 205.
Проводится исследование неустойчивостей слабоионизованной плазмы с помощью модели Батнагара — Гросса — Крука.

Глава 12

ПЛАЗМА В ПОЛЕ С ШИРОМ

§ 12.1. Определение шири

Пусть в плазме протекает ток плотностью \mathbf{j}_0 с компонентами

$$\mathbf{j}_0 = j_{0y}(x)\mathbf{e}_y + j_{0z}(x)\mathbf{e}_z. \quad (12.1)$$

В соответствии с уравнениями Максвелла равновесное магнитное поле \mathbf{B}_0 должно в этом случае иметь компоненты

$$\mathbf{B}_0 = B_{0z}(x)\mathbf{e}_z + B_{0y}(x)\mathbf{e}_y, \quad (12.2)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$-\frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_{0y}; \quad \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_{0z}. \quad (12.3)$$

Силовые линии поля (12.2) прямые. Вследствие зависимости B_{0z} и B_{0y} от x не все они параллельны друг другу: направление силовой линии есть, вообще говоря, функция координаты x . Таким образом, поле (12.2) — это пример поля с прямыми, но не параллельными друг другу силовыми линиями. Изучение неустойчивостей плазмы в таком поле является целью настоящей главы.

Поскольку в случае (12.2) стационарные параметры как поля, так и плазмы зависят только от x , то координатная зависимость возмущений может быть принята в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(ik_y y + ik_z z) \psi(x). \quad (12.4)$$

В отличие от обсуждавшегося выше случая $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$ теперь волновые числа k_z и k_y не имеют смысла соответст-

венно продольной и поперечной (в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{B}_0 и ∇f_0) компонент волнового вектора \mathbf{k} . Роль последних теперь играют величины k_{\parallel} и k_b , удовлетворяющие условиям

$$ik_{\parallel}\psi = \mathbf{e}_0 \nabla \psi; \quad ik_b \psi = \mathbf{e}_b \nabla \psi, \quad (12.5)$$

где \mathbf{e}_0 и \mathbf{e}_b — единичные орты вдоль \mathbf{B}_0 и в направлении, перпендикулярном к плоскости $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_x$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= h_z \mathbf{e}_z + h_y \mathbf{e}_y; \\ \mathbf{e}_b &= [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_x] = h_z \mathbf{e}_y - h_y \mathbf{e}_z; \\ h_z &= B_{0z}/B_0; \quad h_y = B_{0y}/B_0. \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Индекс b используется для обозначения бинормали (binormal): в случае цилиндрической геометрии \mathbf{e}_b направлено по бинормали к силовой линии.

Из (12.5), (12.6) следует, что (k_{\parallel}, k_b) связаны с (k_y, k_z) соотношениями

$$\left. \begin{aligned} k_{\parallel} &= k_z h_z + k_y h_y; \\ k_b &= k_y h_z - k_z h_y. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Поскольку коэффициенты h_z, h_y являются функциями x , то вместе с ними, вообще говоря, зависят от x и величины k_{\parallel}, k_b . В задачах о возмущениях с $k_{\parallel} \ll k_b$ наиболее существенна координатная зависимость величины k_{\parallel} . Это ясно, если вспомнить, что в случае $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$ всем обсуждавшимся выше типам градиентных неустойчивостей соответствуют малые k_z/k_y . Поэтому, согласно первому равенству (12.7), наличие даже небольшого B_{0y} может приводить к заметному отличию k_{\parallel} от k_z (поскольку $k_y \gg k_z$).

Рассмотрим теперь, чем определяется координатная зависимость $k_{\parallel}(x)$ и соответственно производная $\partial k_{\parallel}/\partial x$. Пусть $k_{\parallel}(x) = 0$ в некоторой точке $x = x_0$, т. е.

$$k_z h_z(x_0) + k_y h_y(x_0) = 0. \quad (12.8)$$

Тогда вблизи x_0

$$k_{\parallel}(x) = \left(k_z \frac{\partial h_z}{\partial x} + k_y \frac{\partial h_y}{\partial x} \right)_{x=x_0} (x - x_0). \quad (12.9)$$

Исключая отсюда с помощью (12.8) и второго равенства (12.7) (при $x = x_0$) волновые числа k_z и k_y , получаем

$$k_{\parallel}(x) = \left\{ h_z^2 k_b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_{0y}}{B_{0z}} \right) \right\}_{x=x_0} (x - x_0). \quad (12.10)$$

Видно, что k_{\parallel} зависит от координат, если

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{B_{0y}}{B_{0z}} \right) \neq 0. \quad (12.11)$$

Поле, которому соответствует зависящее от координат k_{\parallel} , принято называть *магнитным полем со скошенными силовыми линиями*, или *магнитным полем с широм* (shear — ножницы).

В обсуждаемом здесь случае плоской симметрии поле с широм означает то же, что и поле с непараллельными силовыми линиями. Непараллельность двух силовых линий, проходящих через точки x_0 и $x \neq x_0$, означает

$$[\mathbf{e}_0(x), \mathbf{e}_0(x_0)] \neq 0. \quad (12.12)$$

Считая разность $x - x_0$ малой и разлагая $\mathbf{e}_0(x)$ в ряд в окрестности x_0 , находим, что (12.12) сводится к (12.11).

Обращаясь к уравнениям (12.3), условие отличного от нуля шира можно записать просто как неравенство нулю плотности тока в направлении магнитного поля:

$$j_0 \mathbf{B}_0 \neq 0. \quad (12.13)$$

С помощью (12.3) уравнение (12.10) преобразуется к виду

$$k_{\parallel}(x) = \frac{4\pi}{c} \frac{j_0 \eta}{B_0} k_b (x - x_0). \quad (12.14)$$

Мерой шира может служить безразмерный параметр Θ , имеющий смысл угла поворота силовых линий на длине неоднородности плазмы a :

$$\Theta \approx ah_z^2 \partial (B_{0y}/B_{0z}) / \partial x. \quad (12.15)$$

С учетом (12.3) это соотношение можно представить еще и так:

$$\Theta \approx 4\pi a (j_0 \mathbf{B}_0) / c B_0^2. \quad (12.16)$$

Параметр Θ часто будем называть просто широм.

Записанное через Θ уравнение (12.10) означает

$$k_{\parallel} \approx \Theta k_b (x - x_0) / a. \quad (12.17)$$

Соотношение (12.17) удобно использовать при рассмотрении возмущений, у которых в отсутствие шира $k_{\parallel} = 0$. В противном случае, но при условии $k_{\parallel} \ll k_b$ более наглядный смысл имеет соотношение

$$k_{\parallel}(x) - k_{\parallel}(x_0) \approx \Theta k_b (x - x_0)/a. \quad (12.18)$$

Оно получается с использованием равенства (12.8), которое теперь, однако, следует считать приближенным.

§ 12.2. Механизм стабилизации широм

Если в результате наличия шира величина k_{\parallel} — достаточно крутая функция x , то может иметь место своеобразный эффект стабилизации возмущений, состоящий в следующем.

Вспомним, что всякий волновой пакет имеет некоторый конечный размер по x , по крайней мере не меньший чем $1/k_x$. С другой стороны, продольное волновое число нарастающего во времени пакета всегда ограничено сверху некоторым $k_{\parallel \text{ макс}}$. Из этого следует, что нарастающими могут быть лишь такие пакеты, изменение продольного волнового числа которых на расстоянии $1/k_x$ во всяком случае не превосходит $k_{\parallel \text{ макс}}$, т. е.

$$k_x^{-1} \partial k_{\parallel} / \partial x < k_{\parallel \text{ макс}}. \quad (12.19)$$

Величины $k_{\parallel \text{ макс}}$ и k_x определяются из задачи о плазме в поле с $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$ и потому не зависят от шира. Отсюда ясно, что раскачка рассматриваемого волнового пакета невозможна, если производная $\partial k_{\parallel} / \partial x$ достаточно велика. В соответствии с (12.18) последнее означает

$$\Theta > (k_{\parallel \text{ макс}}/k_b) k_x a. \quad (12.20)$$

Неравенство (12.19) и противоположное ему неравенство (12.20) относятся к возмущениям с $\gamma \geq \text{Re} \omega$. В случае $\gamma \ll \text{Re} \omega$ продольное волновое число не должно заметно меняться на расстоянии порядка $\Delta x \approx \gamma^{-1} \partial \text{Re} \omega / \partial k_x$ (см. § 1.4) либо на размере неоднородности плазмы a , если $a < \gamma^{-1} \partial \text{Re} \omega / \partial k_x$. Поэтому критерий несущественности изменения k_{\parallel} для таких возмущений означает

$$\frac{\partial k_{\parallel}}{\partial x} \min \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \text{Re} \omega}{\partial k_x}, a \right) < k_{\parallel \text{ макс}}. \quad (12.21)$$

Напротив, наличие шира сделает невозможным существование такого рода возмущений, если

$$\Theta > (k_{\parallel \text{ макс}}/k_b) \max \{1, \gamma a (\partial \text{Re} \omega / \partial k_x)^{-1}\}. \quad (12.22)$$

Следует иметь в виду, что наряду со стабилизирующим эффектом шира может проявляться дестабилизирующий эффект протекающего по плазме тока, создающего шир.

§ 12.3. Общие оценки стабилизирующего влияния шира

Неустойчивости плазмы существенно зависят от соотношения между градиентами температуры и плотности, степени столкновительности плазмы, поперечного волнового числа. В этом параграфе мы не будем конкретизировать первые два фактора, полагая, что плазма имеет параметры, наиболее неблагоприятные для устойчивости (например, достаточно большое $|\partial \ln T / \partial \ln n_0|$ при не слишком частых столкновениях). Рассмотрим, как влияет шир на возмущения такой плазмы при различных значениях поперечного волнового числа.

1. Крупномасштабные возмущения. Пусть $k_{\perp} a \approx 1$, что соответствует наиболее крупномасштабным возмущениям. Для них из (12.20) либо из (12.22) следует оценка существенности шира:

$$\Theta > k_{\parallel \text{ макс}} a. \quad (12.23)$$

$k_{\parallel \text{ макс}}$ может достигать величины порядка ω^*/v_{Ti} . Для таких возмущений (12.23) означает

$$\Theta > \rho_i/a. \quad (12.24)$$

Видно, что все крупномасштабные неустойчивости могут быть подавлены уже при достаточно малом шире. Однако создание даже небольшого шира пропуском тока по плазме может повлечь за собой появление различного рода токовых неустойчивостей, как градиентных, так и обычных, неградиентных. Для оценки возможности дестабилизирующего влияния тока воспользу-

емся соотношением (12.16) и исключим из (12.24) параметр Θ . Результат можно представить в виде

$$\Pi_i > v_{Ti}/V_0, \quad (12.25)$$

где $\Pi_i \equiv (\omega_{pi}a/c)^2$ — погонное число ионов. Чтобы исключить возможность развития обычных токовых неустойчивостей, следует считать $v_{Ti} \geq V_0$. С учетом этого получается необходимое условие подавления крупномасштабных неустойчивостей:

$$\Pi_i > 1. \quad (12.26)$$

Если это условие не выполнено, то при $v_{Ti} > V_0$ в плазме с $|\partial \ln T / \partial \ln n_0| \geq 1$ должны раскачиваться крупномасштабные возмущения, приводящие, по оценкам, к турбулентным коэффициентам переноса порядка коэффициента диффузии Бома.

2. Мелкомасштабные возмущения. Теперь рассмотрим возмущения с $k_{\perp}a \gg 1$. В случае $\gamma \approx \approx \text{Re } \omega$ из (12.20) и соотношения $k_{\perp \text{ макс}} \approx \omega^*/v_{Ti}$ вытекает оценка для шира, стабилизирующего такие возмущения:

$$\Theta > \rho_i/\tilde{a}, \quad (12.27)$$

где $\tilde{a} \approx 1/k_{\perp}$ — минимальный размер локализации возмущения с данным k_{\perp} .

Неравенство (12.27) можно также рассматривать как ограничение сверху на область локализации возмущений при заданном шире:

$$\tilde{a} < \rho_i/\Theta. \quad (12.28)$$

Уменьшение области локализации возмущений также следует считать стабилизирующим эффектом, поскольку чем меньше \tilde{a} , тем меньше турбулентные потоки поперек магнитного поля.

Согласно (12.28), \tilde{a} становится порядка ρ_i при

$$\Theta \approx 1. \quad (12.29)$$

При столь большом шире невозможна раскачка возмущений с $k_{\perp}\rho_i \leq 1$. С другой стороны, можно показать, что при $\Theta \approx 1$ невозможна и раскачка возмущений с

$k_{\perp}\rho_i \gg 1$. Таким образом, при $\Theta \approx 1$ плазма должна быть свободна от всех неустойчивостей.

Условие (12.29) можно записать через погонную плотность ионов и направленную скорость электронов [ср. с. (12.25)]:

$$\Pi_i \approx (a/\rho_i)(v_{Ti}/V_0). \quad (12.30)$$

Видно, что при $V_0 \leq v_{Ti}$ это условие можно удовлетворить только при очень больших Π_i :

$$\Pi_i \geq a/\rho_i. \quad (12.31)$$

В плазме с меньшим погонным числом ионов могут развиваться либо обычные токовые неустойчивости, если $V_0 > v_{Ti}$, либо мелкомасштабные градиентные, если $V_0 < v_{Ti}$.

Библиографический обзор к гл. 12

Бесстолкновительная плазма

1. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. Дрейфовая неустойчивость плазмы в винтовом магнитном поле.—«Ядерный синтез», 1963, т. 3, с. 28.
2. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. Кинетический метод исследования колебаний и устойчивости неоднородной плазмы в винтовом магнитном поле.—«Ядерный синтез», 1963, т. 3, с. 113.
3. Галеев А. А. Об одном асимптотическом методе в теории устойчивости плазмы.—«Докл. АН СССР», 1963, т. 150, с. 503.
4. Галеев А. А. Теория устойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, с. 44, с. 1920.
В работах [1—4] исследовалось влияние шира на неустойчивости, обусловленные градиенту плотности. (В работах [3—4] считалось также, что $\nabla T \neq 0$, но не были рассмотрены наиболее опасные неустойчивости с $\omega \approx k_{\perp} v_{Ti}$.) Получен необходимый критерий стабилизации крупномасштабных возмущений $\Theta > \rho_i/a$. Наряду с потенциальными исследовались также непотенциальные возмущения, существенные при $\beta > m_e/m_i$. Для этого случая получен ряд критериев стабилизации, зависящих от β . В работе [2] для возмущений типа волновых пакетов получен критерий стабилизации $\Theta > (m_e/m_i)^{1/2}$.
5. Михайловский А. Б. Колебания неоднородной плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леоновича. Вып. 3, М., Атомиздат, 1963, с. 141.
6. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия.—«Атомная энергия», 1963, т. 15, с. 451.

- В обзорах [5, 6] обсуждается, в частности, влияние шира на неустойчивости плазмы.
7. **Corpi V.** «Inertial» instabilities in plasma.—«Phys. Lett.», 1964, v. 11, p. 226.
 8. **Михайловский А. Б.** К теории устойчивости пространственно-неоднородного тока в плазме. I. Низкочастотные волны.—«Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 1933.
В работах [7, 8] исследуется влияние шира на гидродинамическую токово-конвективную неустойчивость.
 9. **Jukes J. D.** Micro-instabilities in magnetically confined, inhomogeneous plasma.—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 1468. Решением задачи на собственные значения получен критерий стабилизации $\Theta > (m_e/m_i)^{1/2} k_b \rho_i$.
В работе [9] исследуется влияние шира на гравитационно-кинетическую неустойчивость.
 10. **Krafl N. A., Rosenbluth M. N.** Universal instability in complex field geometries.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1488.
Таким путем, как и [3, 4], получен критерий $\Theta > \rho_i/a$, но с учетом численного коэффициента, § 12.3.
 11. **Кадомцев Б. Б., Погуце О. П.** Неустойчивость и связанные с ней макроскопические эффекты в тороидальных разрядах.—«Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Research». IAEA, Vienna, 1966, v. 1, p. 365.
 12. **Кадомцев Б. Б., Погуце О. П.** Турбулентные процессы в тороидальных системах.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1966, с. 209.
В работах [11, 12] указано на существенную роль возмущений с $k_{||} \approx \omega^*/v_{Ti}$ в плазме с неоднородной температурой, § 12.3; такие возмущения труднее всего стабилизируются широм. Приведены оценки влияния шира на основные типы неустойчивостей плазмы. Оценивается также роль турбулентных процессов в неустойчивой плазме, находящейся в поле с широм.
 13. **Convective modes driven by density gradients.**—«Nucl. Fusion», 1966, v. 6, p. 261. Auth.: V. Corpi, G. Laval, R. Pellat, M. N. Rosenbluth.
Обсуждается поведение волновых пакетов в неоднородной плазме, находящейся в поле с широм. Для таких возмущений получен критерий стабилизации типа $\Theta > (m_e/m_i)^{1/2} k_b \rho_i$ с численным коэффициентом.
 14. **Погуце О. П.** Температурная дрейфовая неустойчивость плазмы со скошенными силовыми линиями.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 759.
 15. **Corpi V., Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z.** Instabilities due to temperature gradients in complex magnetic field configurations.—«Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 582.
В работах [14, 15] обсуждается влияние шира на неустойчивость с $k_{||} \approx \omega^*/v_{Ti}$ в плазме с $\nabla T \neq 0$.
 16. **Михайловский А. Б.** Электронная температурная неустойчивость неоднородной плазмы.—«Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1365.
Показано, что неустойчивость электронно-звуковой ветви в плазме с $\nabla T \neq 0$, как и ионно-звуковой ветви, относится к числу наиболее трудно стабилизируемых широм.
 17. **Коган Е. Я., Моисеев С. С.** О низкочастотных неустойчивостях плазмы.—«Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 805.
Показано, что очень коротковолновые возмущения $k_{\perp} \rho_i \approx (m_i/m_e)^{1/2}$ плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$ стабилизируются лишь при $\Theta \approx 1$.
 18. **Rutherford P. H., Frieman E.** Stabilization of drift waves by shear.—«Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 1007.
Рассматривается поведение волновых пакетов. Получен критерий стабилизации наиболее опасных возмущений плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$ типа $\Theta > (m_e/m_i)^{1/2} k_b \rho_i$.
 19. **Corpi V.** Current-driven instabilities in configurations with sheared magnetic field.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2273.
Обсуждается неустойчивость типа тиринг-моды при $\omega > v_{ei}$. Такая неустойчивость может проявляться только при очень малых β .
 20. **Frieman E., Weimar K., Rutherford P.** Maximal ordering stability problem.—«Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Research», v. 1. IAEA, Vienna, 1966, p. 595.
В работе [20] рассматриваются непотенциальные возмущения плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$ с учетом вязкости.
 21. **Kitao K.** Shear stabilization of density gradient drift instabilities.—«Plasma Phys.», 1967, v. 9, p. 523.
В работах [20, 21] обсуждается влияние шира на непотенциальные неустойчивости плазмы с $\beta > m_e/m_i$.
 22. **Davidson J. N., Kammash T.** A study of plasma stability in sheared magnetic fields.—«Nucl. Fusion», 1968, v. 8, p. 203.
Обзорная работа, в которой сравнивается метод собственных функций с методом волновых пакетов. Подробно изложен математический аппарат, используемый при исследовании неустойчивости плазмы в магнитном поле с широм.
 23. **Рухадзе А. А., Силин В. П.** Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы.—«Успехи физ. наук», 1964, т. 82, с. 499.
Обзорная работа, в которой можно найти оценки влияния шира на неустойчивости плазмы.

Столкновительная плазма

24. **Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N.** Finite resistivity instabilities of a sheet pinch.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 459.
Исследуются диссипативные токовые неустойчивости в магнитном поле с широм. Показана возможность развития неустойчивости типа тиринг-моды. Рассмотрено влияние шира на иперционную токово-конвективную неустойчивость, обусловленную градиентом тока. Дается классификация диссипативных неустойчивостей.
25. **Johnson J. L., Greene J. M., Corpi V.** Effect of resistivity on hydromagnetic instabilities in multipolar systems.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 1169.
Обсуждается тот же круг вопросов, что и в работе [24].
26. **Hoh F. C.** Instabilities due to resistivity gradients in low-pressure plasma.—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 956.

27. Coppi B. Current-drive instabilities in configurations with sheared magnetic fields.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2273.
28. Галеев А. А. Токово-конвективные неустойчивости в плазме с большим ларморовским радиусом ионов.—«Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 1740.
В работах [26—28] исследуется влияние конечности ларморовского радиуса ионов на инерционные токовые неустойчивости. В работе [27] содержатся ссылки на более ранние работы по этому вопросу.
В работе [11] указано на безынерционную токово-конвективную неустойчивость в поле с широм.
29. Stringer T. E. Unified approach to resistive and micro-instabilities.—«Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», v. 1. IAEA, Vienna, 1966, p. 571.
Рассматриваются возмущения типа квазимод (волновые пакеты по k_z) в плазме с током.
30. Jukes J. D. Effect of temperature gradient on plasma stability.—«Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 1107.
Обращается внимание на то, что шир слабо влияет на неустойчивости плазмы с $\nabla T \neq 0$. Эти же вопросы обсуждаются в цитированных в гл. 8 работах С. С. Моисеева, И. С. Байкова и А. Б. Михайловского.

Плазма в поле тяжести

- В работах [24, 25] обсуждается гравитационно-диссипативная неустойчивость.
31. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. Влияние «шира» на желобковую неустойчивость разреженной плазмы.—«Ядерный синтез», 1965, т. 5, с. 234.
Исследуется влияние шира на желобковую неустойчивость разреженной бесстолкновительной плазмы.
32. Jukes J. D. Gravitational resistive instabilities in plasma with finite Larmor radius.—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 52.
33. Coppi B. Ion gyro-radius effect and stabilization of plasma dissipative modes.—«Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 12, p. 417.
34. Coppi B. Comments on «Gravitational resistive instabilities in plasma with finite Larmor radius».—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 1096.
35. Coppi B. Influence of gyration radius and collisions on hydro-magnetic stability.—«Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 1501.
В работах [32—35] исследуется влияние конечности ларморовского радиуса ионов на гравитационно-диссипативную неустойчивость.
36. Roberts K. V., Taylor J. B. Gravitational resistive instability of an incompressible plasma in a sheared magnetic field.—«Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 315.
Исследуются возмущения типа волновых пакетов по k_z (квазимоды), соответствующие гравитационно-диссипативной неустойчивости.
37. Coppi B. Criterion for stability against resistive interchange modes.—«Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 12, p. 6.

38. Coppi B. Gravitational instabilities in compressible collisional plasma layer.—«Ann. Phys.», 1964, v. 30, p. 178.
39. Coppi B., Greene J. M., Johnson J. L. Resistive instabilities in a diffuse linear pinch.—«Nucl. Fusion», 1966, v. 6, p. 101.
В работах [37—39] обсуждается соответствие между различными модами неустойчивостей столкновительной плазмы в приближении нулевого ларморовского радиуса ионов.
40. Convective modes driven by density gradients.—«Nucl. Fusion», 1966, v. 6, p. 261. Auth.: B. Coppi, G. Laval, R. Pellat, M. N. Rosenbluth.
Исследуется влияние шира на гравитационно-диссипативную неустойчивость при $|\omega + iv_{ei}| > k_z v_{Te}$.
41. Coppi B., Rosenbluth M. N. Collisional interchange instabilities in shear and $\{dl/B\}$ stabilized systems.—«Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Research», v. 1. IAEA, Vienna, 1966, p. 617.
42. Coppi B., Roos B. W. Numerical treatment of the stability of plasma confinement configurations.—«Plasma Phys.», 1967, v. 9, p. 585.
43. Stringer T. E. Effect of ion collisions and other terms on the resistive — g instability in plasmas.—«Phys. Fluids», 1967, v. 10, p. 418.
В работах [41—43] исследуется влияние полно-ионных столкновений на инерционную гравитационно-диссипативную неустойчивость. В работе [43] наряду с этим рассмотрена безынерционная неустойчивость.
44. Chen F. F. Microinstability and shear stabilization of a low- β , rotating, resistive plasma.—«Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 965.
Исследуется влияние шира на центробежную неустойчивость плазмы в радиальном электрическом поле.
45. Рухадзе А. А., Силин В. П. Кипетическая теория дрейфово-диссипативных неустойчивостей плазмы.—«Успехи физ. наук», 1968, т. 96, с. 87.
Обзорная работа, в которой содержатся оценки влияния шира на неустойчивости плазмы в гравитационном поле.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ (ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ)
ГРАДИЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПЛАЗМЫ В ПРЯМОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Глава 13

УРАВНЕНИЯ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ
КОЛЕБАНИЙ
НЕОДНОРОДНОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ
ПЛАЗМЫ

§ 13.1. Введение

Учет непотенциальности возмущений необходим при не слишком малом значении параметра β — отношения давления плазмы к давлению магнитного поля. Поскольку дисперсионное уравнение потенциальных градиентных возмущений зависит не только от компонент тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} , но и от производных этих компонент по координате (см. гл. 4), то использование общего дисперсионного уравнения теории однородной плазмы вида $|\epsilon_{ij} - (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) N^2| = 0$ для исследования градиентных неустойчивостей неоднородной плазмы может приводить к неверным результатам. В связи с этим вместо величин ϵ_{ij} удобно ввести набор коэффициентов, связывающих возмущения скалярного и векторного потенциалов с возмущением плотностей зарядов и токов. В связи с этим в § 13.2 уравнения Максвелла преобразуются к «потенциальной» форме; иначе говоря, входящие в эти уравнения возмущенные поля \mathbf{E} и \mathbf{B} выражаются через скалярный и векторный потенциалы ψ и \mathbf{A} . В § 13.3 показано, как, зная общий вид связи потенциалов (ψ , \mathbf{A}) с плотностью и токами зарядов (ρ , \mathbf{j}), можно записать общий вид дисперсионного уравнения, учитывающего производные от ϵ_{ij} [см. (13.16)].

Непотенциальность возмущений — это не единственный дополнительный фактор, который необходимо учи-

тывать при изучении колебаний плазмы с ненулевым β . Дело в том, что при $\beta \neq 0$ наряду с неоднородностью стационарных параметров плазмы — плотности, температуры и т. д. важную роль может играть неоднородность стационарного магнитного поля \mathbf{B}_0 , поскольку в силу условия равновесия $\partial \ln B_0 / \partial \ln \rho_0 \approx \beta$. Неоднородность магнитного поля модифицирует найденные в гл. 4 интегралы движения частиц и траектории последних. В связи с этим необходим дополнительный анализ равновесных параметров плазмы, изложению которого посвящены § 13.4, 13.5.

Модификация равновесных параметров плазмы, связанная с учетом неоднородности магнитного поля, влечет за собой модификацию возмущенной функции распределения, найденной в гл. 4, которая, кроме того, в отличие от гл. 4 должна вычисляться с учетом непотенциальности электрического поля и возмущений магнитного поля. Это вычисление дано в § 13.6.

Знание возмущенной функции распределения позволяет найти коэффициенты матрицы, входящие в дисперсионное уравнение (13.16). Нахождение этих коэффициентов производится в § 13.7; § 13.8, 13.9 посвящены обсуждению важных частных случаев дисперсионного уравнения непотенциальных возмущений плазмы низкого давления (§ 13.8) и низкочастотных длинноволновых возмущений плазмы конечного давления (§ 13.9).

§ 13.2. Преобразование уравнений Максвелла

При наличии вихревой части электрическое поле возмущений может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t, \quad (13.1)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал. Величины ψ и \mathbf{A} соответствуют потенциальной и вихревой частям \mathbf{E} , если калибровка кулоновская:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (13.2)$$

Как отмечалось в § 4.1, градиентные эффекты важны лишь для возмущений с $k_z \ll k_\perp$. При этом условии соотношение (13.2) приближенно сводится к $\operatorname{div} \mathbf{A}_\perp = 0$ и означает обращение в нуль «потенциальной» проекции

$\mathbf{A}_\perp, \mathbf{k}_\perp \mathbf{A}_\perp = 0$. Две другие проекции при этом имеют простой смысл: продольная проекция A_z характеризует возмущенное магнитное поле, перпендикулярное к основному, \mathbf{B}_\perp а поперечная \mathbf{A}_\perp — параллельное основному \mathbf{B}_z .

Поперечные компоненты \mathbf{A}_\perp можно характеризовать одной величиной A_\perp , определенной соотношением

$$A_\perp = [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{A}]_z / k_\perp. \quad (13.3)$$

Проекции A_x, A_y выражаются через A_\perp так (учтено $\mathbf{k}_\perp \mathbf{A}_\perp = 0$):

$$A_x = -k_y A_\perp / k_\perp, \quad A_y = k_x A_\perp / k_\perp. \quad (13.4)$$

Если колебания непотенциальны, то плотность заряда зависит как от ψ , так и от A_\perp, A_z , т. е.

$$\rho = \rho(\psi) + \rho(A_\perp) + \rho(A_z). \quad (13.5)$$

В этом случае уравнение Пуассона имеет вид

$$\epsilon_{00} \psi - (4\pi/k^2) [\rho(A_\perp) + \rho(A_z)] = 0, \quad (13.6)$$

где $\epsilon_{00} \equiv \epsilon_0$ — скаляр диэлектрической проницаемости, см. п. 4 § 4.1.

Уравнение (13.6) должно быть дополнено еще двумя соотношениями между ψ, A_\perp, A_z , которые можно получить, исходя из уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} / c - i\omega \mathbf{E} / c. \quad (13.7)$$

Взяв проекции этих уравнений на направление $\mathbf{A}_\perp, \mathbf{B}_0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} k^2 A_\perp &= 4\pi j_\perp / c + \omega^2 A_\perp / c^2; \\ k^2 A_z &= 4\pi j_z / c + \omega^2 A_z / c^2, \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

где $j_\perp = [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{j}]_z / k_\perp$ — составляющая тока, поперечная волновому вектору и равносному магнитному полю.

При рассмотрении эффектов непотенциальности совокупность уравнений (13.6), (13.8) будем использовать в качестве исходной.

§ 13.3. Общий вид дисперсионного уравнения для непотенциальных возмущений

Полагая, что непотенциальная часть плотности заряда найдена, представим ее в виде

$$\{\rho(A_\perp), \rho(A_z)\} = (k_\perp \omega / 4\pi c) \{\epsilon_{02} A_\perp, \epsilon_{03} A_z\}. \quad (13.9)$$

Поясним смысл величин $\epsilon_{02}, \epsilon_{03}$. Согласно уравнению непрерывности,

$$\rho = (1/\omega) (\mathbf{kj} - i\partial j_\alpha / \partial x_\alpha) = (1/\omega) (k_\alpha \sigma_{\alpha\beta} - i\partial \sigma_{\alpha\beta} / \partial x_\beta) E_\beta. \quad (13.10)$$

Выражая \mathbf{E} через потенциалы, отсюда находим

$$\{\rho(A_\perp), \rho(A_z)\} = i(k_\perp / c) \{\sigma_{02} A_\perp, \sigma_{03} A_z\}, \quad (13.11)$$

$$\text{где} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{02} &= (k_\alpha - i\partial / \partial x_\alpha) (\sigma_{\alpha y} k_x - \sigma_{\alpha x} k_y) / k_\perp^2; \\ \sigma_{03} &= (k_\alpha - i\partial / \partial x_\alpha) \sigma_{\alpha z} / k_\perp. \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

Введенные в (13.9) величины $\epsilon_{02}, \epsilon_{03}$ выражаются через σ_{02}, σ_{03} , так же как $\epsilon_{\alpha\beta}$ через $\sigma_{\alpha\beta}$ (см. т. 1, приложение к гл. 1):

$$(\epsilon_{02}, \epsilon_{03}) = (4\pi i / \omega) (\sigma_{02}, \sigma_{03}), \quad (13.13)$$

Видно, что в случае однородной плазмы величины $\epsilon_{02}, \epsilon_{03}$ представляют собой произведения компонент тензора диэлектрической проницаемости на волновой вектор. В неоднородной плазме к этому добавляются градиентные члены, обусловленные конвекцией зарядов.

Далее находим связь с потенциалами ψ, A_\perp, A_z входящих в уравнение (13.8) токов j_\perp, j_z . Полагая, что в соотношении $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$ величины $\sigma_{\alpha\beta}$ известны, получаем:

$$\left. \begin{aligned} j_\perp &= -ik_\perp \sigma_{20} \psi + i(\omega/c) (\sigma_{22} A_\perp + \sigma_{23} A_z); \\ j_z &= -ik_\perp \sigma_{30} \psi + i(\omega/c) (\sigma_{32} A_\perp + \sigma_{33} A_z), \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{20} &= (k_x \sigma_{y\beta} - k_y \sigma_{x\beta}) k_\beta / k_\perp^2; \\ \sigma_{30} &= \sigma_{z\beta} k_\beta / k_\perp; \\ \sigma_{22} &= [k_x^2 \sigma_{yy} + k_y^2 \sigma_{xx} - k_x k_y (\sigma_{yx} + \sigma_{xy})] / k_\perp^2; \\ \sigma_{23} &= (k_x \sigma_{yz} - k_y \sigma_{xz}) / k_\perp; \\ \sigma_{32} &= (\sigma_{zy} k_x - \sigma_{zx} k_y) / k_\perp; \\ \sigma_{33} &= \sigma_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Из (13.6) — (13.9), (13.14) и (13.15) получается дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{20} & \epsilon_{22} - N^2 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{30} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - N^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.16)$$

Здесь соответствующие компоненты ϵ_{ik} [$(i, k) = (0, 2, 3)$] связаны с σ_{ik} , определенными соотношениями (13.15), уравнениями типа (13.13); $N^2 = (ck/\omega)^2$.

§ 13.4. Интегралы движения частиц и равновесное состояние плазмы в неоднородном магнитном поле

Вследствие асимметрии стационарного распределения частиц по поперечным скоростям средняя скорость каждой компоненты плазмы поперек магнитного поля $\mathbf{V}_{\perp 0}$ отлична от нуля. Как следует из § 4.6, она равна

$$\mathbf{V}_{\perp 0} = [\mathbf{e}_z, \nabla p_{\perp}] / m\omega_B. \quad (13.17)$$

С движением компонент плазмы связан ток, текущий поперек магнитного поля:

$$\mathbf{j}_{\perp 0} = \sum_{e, i} en_0 \mathbf{V}_{\perp 0} = c [\mathbf{e}_z, \nabla \sum_{i, e} p_{\perp}] / B_0. \quad (13.18)$$

Вследствие этого магнитное поле \mathbf{B}_0 , предполагаемое однородным, в действительности не является таковым.

С помощью уравнений Максвелла приходим, что плотность тока $\mathbf{j}_{\perp 0}$ приводит к поперечному градиенту B_0 , равному

$$\nabla_{\perp} B_0 = 4\pi [\mathbf{e}_z, \mathbf{j}_{\perp 0}] / c. \quad (13.19)$$

В предшествующих главах учитывалась неоднородность плазмы, но пренебрегалось неоднородностью магнитного поля. Это справедливо лишь при

$$\partial \ln B_0 / \partial \ln p_{\perp} \ll 1. \quad (13.20)$$

Из (13.18), (13.19) следует, что это неравенство означает

$$\beta_{\perp} \equiv 8\pi (p_{\perp i} + p_{\perp e}) / B_0^2 \ll 1. \quad (13.21)$$

Таким образом, приближение однородного магнитного поля относится только к плазме с малым β (прибли-

жение плазмы низкого давления). Напротив, при исследовании неустойчивостей плазмы с конечным β магнитное поле следует считать неоднородным.

Если магнитное поле неоднородно, то величины X , Y , определенные соотношением (4.80), не являются интегралами движения. Точный «неоднородный» интеграл уравнений движения частиц в прямом однородном поле удается найти только при наличии плоской или цилиндрической симметрии. В первом случае это проекция обобщенного импульса, поперечная полю и направлению неоднородности

$$V_y = v_y + \int \omega_B(x) dx, \quad (13.22)$$

а во втором — z — проекция обобщенного момента количества движения

$$L = rv_{\varphi} + \int r\omega_B(r) dr. \quad (13.23)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением поля плоской симметрии. Связь равновесной функции распределения с интегралами движения в этом случае имеет вид:

$$f_0(x, v) = F(\epsilon, V_z, V_y). \quad (13.24)$$

При условии, что поле является слабооднородным:

$$v_{\perp} |\nabla \ln B_0| / \omega_B \ll 1, \quad (13.25)$$

разложение типа (4.82) остается в силе и в случае $\nabla B_0 \neq 0$ (с учетом соответствующей симметрии задачи и координатной зависимости поля). Покажем это.

Разлагая (13.24) в ряд по $v_y / \int \omega_B dx$, получаем

$$f_0(v, x) = F(\epsilon_{\perp}, V_z, \int \omega_B dx) + v_y \partial F / \partial V_y. \quad (13.26)$$

Поскольку $\partial F / \partial x = (\partial F / \partial V_y) (dV_y / dx)$ и $dV_y / dx = \omega_B(x)$, то (13.26) сводится к (4.82). Отсюда следует также, что выражение для тока $\mathbf{j}_{\perp 0}$ (13.18), полученное в приближении $\nabla B_0 = 0$, остается в силе и при $\nabla B_0 \neq 0$ и что уравнение (13.19) справедливо не только при $\beta_{\perp} \ll 1$, но и при произвольном β_{\perp} .

§ 13.5. Равновесные траектории

Движение частицы в неоднородном магнитном поле определяется уравнениями

$$dv/dt = [\mathbf{v}, \omega_B(\mathbf{r})]; \quad d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}. \quad (13.27)$$

При $\nabla B_0 = 0$ зависимость скорости и координат от времени имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 - (v_{\perp 0}/\omega_B) \{ \sin [\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)] - \sin \alpha_0 \}; \\ y(t) &= y_0 + (v_{\perp 0}/\omega_B) \{ \cos [\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)] - \cos \alpha_0 \}; \\ z(t) &= z_0 + v_{z0}(t - t_0); \\ v_x(t) &= v_{\perp 0} \cos [\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)]; \\ v_y(t) &= v_{\perp 0} \sin [\alpha_0 - \omega_B(t - t_0)]; \\ v_z(t) &= v_{z0}, \end{aligned} \right\} (13.28)$$

где $v_{\perp 0} = v_{\perp}(t_0)$; $v_{z0} = v_z(t_0)$; $\alpha_0 = \text{arctg}[v_y(t_0)/v_x(t_0)]$, а x_0, y_0, z_0 — координаты частицы в момент времени $t = t_0$.

При $\nabla B_0 \neq 0$ найти точное решение уравнений (13.27) не удастся. Используя предположение о слабой неоднородности поля (13.25), можно, однако, найти приближенное решение.

Будем интересоваться движением частиц только поперек магнитного поля — продольное движение не зависит от магнитного поля. Ограничимся учетом членов нулевого и первого приближений по параметру (13.25). В нулевом приближении полагаем, что частица движется в постоянном магнитном поле, равном его значению в точке ведущего центра частицы;

$$B_0^{(0)} = B_0(x_0 + v_{\perp 0} \sin \alpha_0 / \omega_B^{(0)}), \quad (13.29)$$

где $\omega_0^{(0)} = \omega_B(B_0^{(0)})$. Координаты и скорости нулевого приближения $v_0^{(0)}(t), r^{(0)}(t)$ определяются уравнениями (13.28) с $\omega_B = \omega_0^{(0)}$.

Далее учитываем, что в действительности на частицу действует поле, равное своему значению в точке траектории. В качестве последней принимаем координату нулевого приближения. Поле в точке траектории отличается от $B_0^{(0)}$ на величину

$$B_0^{(1)}(x) = - [\kappa_B v_y^{(0)}(t) / \omega_B^{(0)}] B_0^{(0)}, \quad (13.30)$$

где $\kappa_B = \partial \ln B_0^{(0)} / \partial x$. Подставляя в (13.27) сумму (13.29) и (13.30), получаем систему уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} dv^{(1)}/dt &= [v^{(1)}, \omega_B^{(0)}] - [\kappa_B v_{\perp}^{(0)}(t) / \omega_B^{(0)}] [v^{(0)}(t), \omega_B^{(0)}]; \\ dr^{(1)}/dt &= v^{(1)}. \end{aligned} \right\} (13.31)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} v^{(1)}(t) &= -\kappa_B [v_x^{(0)}(t) - v_x^{(0)}(t_0)] [v^{(0)}(t), \omega_B^{(0)}] / \omega_B^{(0)2}; \\ x^{(1)}(t) &= - (u_B / 2\omega_B^{(0)}) \{ \cos [2\alpha^{(0)}(t)] - \cos 2\alpha_0 \} + \\ &\quad + (2u_B / \omega_B^{(0)}) \cos \alpha_0 \{ \cos \alpha^{(0)}(t) - \cos \alpha_0 \}; \\ y^{(1)}(t) &= u_B (t - t_0) + (u_B / 2\omega_B^{(0)}) \{ \sin [2\alpha^{(0)}(t)] - \\ &\quad - \sin 2\alpha_0 \} + (2u_B / \omega_B^{(0)}) \cos \alpha_0 \{ \sin \alpha^{(0)}(t) - \sin \alpha_0 \}; \\ \alpha^{(0)}(t) &\equiv \alpha_0 - \omega_B^{(0)}(t - t_0). \end{aligned} \right\} (13.32)$$

Здесь

$$u_B = \kappa_B v_{\perp 0}^2 / 2\omega_B^{(0)}. \quad (13.33)$$

Эта величина имеет смысл скорости дрейфа частицы в неоднородном магнитном поле, что видно, если усреднить по времени первое либо третье уравнение (13.32). Дрейф частиц направлен поперек магнитного поля и его градиента, так что

$$\overline{v_{\perp}^{(1)}(t)} = u_B [e_z e_x]. \quad (13.34)$$

Итак, уравнения первого приближения описывают направленные движение частицы поперек магнитного поля и осцилляции с циклотронной частотой и ее второй гармоникой. Наиболее важным эффектом является направленное движение, поскольку осцилляторное движение есть и в нулевом приближении.

§ 13.6. Возмущенная функция распределения

Выражая с помощью (13.24) производную $\partial f_0 / \partial v$ через интегралы движения и подставляя результат в (1.15), получаем для f уравнение, аналогичное (4.92). При вычислении f пренебрегаем всеми добавками, обусловленными неоднородностью магнитного поля, кроме членов с магнитным дрейфом. При этом для функции $f(k, \omega, x, v)$ получаем следующее выражение:

$$f(\mathbf{k}, \omega, x, \mathbf{v}) = -\frac{ie}{m} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[E_z \left[\frac{\partial E}{\partial V_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + E_y \frac{\partial F}{\partial V_y} \right] + \Phi_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n [(n\omega_B J_n \mathbf{k}_\perp \mathbf{E}_\perp + iJ'_n k_\perp v_\perp \times \right. \\ \left. \times [\mathbf{k}_\perp, \mathbf{E}_\perp]_z) / k_\perp^2 + J_n (u_B E_y + v_z E_z)] \times \right. \\ \left. \times \exp [i\xi \sin(\alpha - \Psi) - in(\alpha - \Psi)] \right\}. \quad (13.35)$$

Здесь

$$\Phi_1 = \left. \begin{aligned} \zeta_n &= (\omega - n\omega_B - k_z v_z - k_y u_B)^{-1}; \\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} &+ \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial V_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} \right) + \frac{k_y}{\omega} \frac{\partial F}{\partial V_y}. \end{aligned} \right\} \quad (13.36)$$

Компоненты \mathbf{E} выражаем через Ψ , A_\perp и A_z . При такой форме записи, используемой в дальнейшем, имеем

$$f(\mathbf{k}, \omega, x, \mathbf{v}) = \frac{e}{m} \left\{ \Psi \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} + \frac{1}{c} \left[A_z \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_\perp \cos \Psi \frac{1}{\omega_B} \frac{\partial F}{\partial x} \right] - \omega \Phi_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \left[J_n \left(\Psi - \frac{v_z}{c} A_z \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (i v_\perp J'_n + u_B J_n \cos \Psi) A_\perp \right] \exp [i\xi \sin(\alpha - \Psi) - in(\alpha - \Psi)] \right\}. \quad (13.37)$$

§ 13.7. Диэлектрическая проницаемость неоднородной бесстолкновительной плазмы конечного давления

С помощью (13.27) находим плотность заряда и две компоненты плотности тока j_z и $j_\perp \equiv [\mathbf{k}, \mathbf{j}] / k_\perp$. Далее, используя соотношения § 13.3, находим входящие в дисперсионное уравнение (13.16) величины $\varepsilon_{ik} [(i, \mathbf{k}) = (0, 2, 3)]$:

$$\varepsilon_{00} = 1 - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n^2 G_1 \right) d\varepsilon_\perp dv_z; \\ \varepsilon_{02} = -\varepsilon_{20} = i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{mk\omega} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n J'_n v_\perp G d\varepsilon_\perp dv_z; \\ \varepsilon_{03} = \varepsilon_{30} = - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{mk\omega} \int v_z \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n^2 G_1 \right) d\varepsilon_\perp dv_z; \\ \varepsilon_{22} = 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int v_\perp^2 G \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n'^2 d\varepsilon_\perp dv_z; \\ \varepsilon_{32} = -\varepsilon_{23} = i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int v_z v_\perp G \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n J'_n d\varepsilon_\perp dv_z; \\ \varepsilon_{33} = 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int v_z \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\perp} + v_z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n J_n^2 G_1 \right) d\varepsilon_\perp dv_z. \quad (13.38)$$

Здесь G , G_1 означают то же, что и в § 4.7, но с $\nabla F \parallel \mathbf{x}$, так что $G = \Phi_1$, $G_1 = (n/k^2) k_y \partial G / \partial x$ {напомним, что в (13.36) можно заменять $\partial / \partial V_y \rightarrow (1/\omega_B) \partial / \partial x$ }.

Вследствие того, что функция ζ_n содержит в знаменателе член с магнитным дрейфом [см. (13.36)], в плазме конечного давления возможен не только «продольный» резонанс между волной и частицей $v_z = (\omega - n\omega_B) / k_z$, но и «поперечный» $u_B = (\omega - n\omega_B) / k_y$. Последний важен при $k_y u_B \geq k_z v_z$.

§ 13.8. Дисперсионное уравнение непотенциальных возмущений плазмы низкого давления

Термин *неустойчивости* (или *возмущения*) плазмы низкого давления используется в случае, если речь идет о таких неустойчивостях плазмы с $\beta \ll 1$, которые могут быть изучены в приближении

$$\mathbf{E} = -\nabla \Psi - (\mathbf{e}_z / c) \partial A_z / \partial t, \quad (13.39)$$

т. е. в приближении

$$A_{\perp} = 0, \quad (13.40)$$

где A_z, A_{\perp} были введены в § 13.2. В этом приближении дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{30} & \epsilon_{33} - N^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.41)$$

Условия применимости приближения плазмы низкого давления определяются с помощью полного дисперсионного уравнения (13.16). Эти условия зависят не только от стационарных параметров плазмы, скажем, параметра β , но и от типа исследуемых возмущений. В случае же, когда переход от полного дисперсионного уравнения (13.16) к дисперсионному уравнению (13.41) невозможен, говорят о колебаниях плазмы конечного давления.

При использовании уравнения (13.41) вместо (13.16) мы пренебрегаем, в частности, членами порядка ϵ_{02}^2 по сравнению с $\epsilon_{00}N^2$. Оценим, что это означает при $k_z = 0$ для возмущений с $\omega \approx \omega_*$ и $k_{\perp} \rho_i \approx 1$. В этом случае, согласно (13.38), $\epsilon_{00} \approx \omega_{pi}^2/\omega_{Bi}^2$, $\epsilon_{02} \approx i\omega_{pi}^2/\omega\omega_{Bi}$, так что $\epsilon_{02}^2/\epsilon_{00}N^2 \approx \beta$. (13.42)

Таким образом, принятое нами приближение означает, что мы пренебрегаем членами порядка β , что возможно лишь при $\beta \ll 1$, т. е. в плазме низкого давления (в буквальном смысле слова!).

Заметим также, что при использовании дисперсионного уравнения (13.41), вообще говоря, необходимо в выражении (13.36) член ξ_n , входящем в формулы (13.38) для ϵ_{ik} , опустить член с $k_y u_B$, поскольку при $\omega \approx \omega_*$ отношение $k_y u_B/\omega$ так же мало, как β . При этом входящие в дисперсионное уравнение (13.41) элементы ϵ_{00} , ϵ_{03} , ϵ_{30} и ϵ_{33} , согласно (13.38), принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{00} &= 1 - \sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2 G_1}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \right) d\epsilon_{\perp} dv_z; \\ \epsilon_{03} = \epsilon_{30} &= - \sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{mk\omega} \int v_z \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2 G_1}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \right) d\epsilon_{\perp} dv_z; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{33} &= 1 + \sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int v_z \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + \right. \\ &\quad \left. + v_z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2 G_1}{\omega - n\omega_B - k_z v_z} \right) d\epsilon_{\perp} dv_z. \end{aligned} \right\} \quad (13.43)$$

В случае низкочастотных возмущений $\omega \ll \omega_B$ выражения (13.43) удобно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{00} &= \epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta; \\ \epsilon_{03} = \epsilon_{30} &= \epsilon_{\parallel} \cos \theta; \\ \epsilon_{33} &= \epsilon_{\parallel}, \end{aligned} \right\} \quad (13.44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\perp} &= - \sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{mk^2 \omega} \int G (1 - J_0^2) \left(1 + \frac{k_z v_z}{\omega} \right) d\epsilon_{\perp} dv_z; \\ \epsilon_{\parallel} &= \sum_{i,e} \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int v_z \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\perp}} + v_z \frac{J_0^2 G}{\omega - k_z v_z} \right) \times \\ &\quad \times d\epsilon_{\perp} dv_z. \end{aligned} \right\} \quad (13.45)$$

При этом дисперсионное уравнение (13.41) записывается в виде

$$\epsilon_{\parallel} [1 - (\omega/ck_z)^2 \epsilon_{\perp}] + (k_{\perp}/k_z)^2 \epsilon_{\perp} = 0. \quad (13.46)$$

При максвелловском распределении электронов и ионов $F \sim \exp(-mv^2/2T)$ из (13.45) следует:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\perp} &= \sum_{i,e} (kd)^{-3} \hat{l} [1 - I_0(z) \exp(-z)]; \\ \epsilon_{\parallel} &= \sum_{i,e} \frac{1}{(k_z d)^3} \hat{l} \left\{ \left[1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_T} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times W \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right] I_0(z) \exp(-z) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (13.47)$$

где оператор \hat{l} определен соотношением (4.102), $z = k_{\perp}^2 T/m\omega_B^2$.

При $z_i \ll 1$ величина $(k_{\perp}/k_z)^2 \epsilon_{\perp}$ мала по сравнению с отдельными слагаемыми в ϵ_{\parallel} как $(k_{\perp} \rho_i)^2$. Поэтому в пренебрежении малыми членами порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2$ дисперсионное уравнение (13.46) распадается на два:

$$\epsilon_{\parallel} \equiv \epsilon_{33} = 0; \quad (13.48)$$

$$\epsilon_{\perp} - N^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (13.49)$$

Первое из этих уравнений в случае однородной плазмы соответствует ионно-звуковым (медленным магнито-звуковым) волнам, а второе — альфвеновским.

Учет последнего члена левой части (13.46) необходим даже при $z_i \rightarrow 0$, если уравнения (13.48), (13.49) имеют решения с вещественными ω . В случае максвелловской плазмы и возмущений типа (13.48), как будет видно из гл. 14, это имеет место при некоторых соотношениях между градиентами плотности и температуры, а в случае возмущений типа (13.49) — при любых соотношениях между этими градиентами.

§ 13.9. Дисперсионные уравнения низкочастотных длинноволновых возмущений плазмы конечного давления

При $\omega \ll \omega_{Bi}$, $\xi \ll 1$ общее дисперсионное уравнение (13.16) с $\epsilon_{\alpha\beta}$, определенными соотношениями (13.38), существенно упрощается. Чтобы получить соответствующее более простое дисперсионное уравнение, сделаем следующие преобразования. Полагаем в (13.38) $\omega \ll \omega_{Bi}$ и опускаем члены, заведомо малые как ω/ω_{Bi} . Заменяем первую строку определителя (13.16) на ее сумму со второй, умноженной на $i\kappa_B k_y/k^2$, и с третьей, умноженной на $(-k_z/k)$. Затем к первому столбцу получающегося определителя прибавляем второй, умноженный на $(-i\kappa_B k_y/k^2)$, и третий, умноженный на $(-k_z/k)$. В результате (13.16) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \epsilon'_{11} - N^2 \cos \theta & \epsilon'_{12} & \epsilon'_{13} + N^2 \cos \theta \\ \epsilon'_{21} & \epsilon_{22} - N^2 & \epsilon_{23} \\ \epsilon'_{31} + N^2 \cos \theta & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - N^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.50)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \epsilon'_{11} &= - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{mk^2 \omega} \int G \left\{ (1 - J_0^2) \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_M}{\omega} \left(1 + J_0^2 - \frac{4J_0 J_1}{\xi} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \xi_0 \frac{\omega_M^2}{\omega} \left(\frac{2J_1}{\xi} - J_0 \right)^2 \right\} d\epsilon_{\perp} dv_z; \\ \epsilon'_{12} = -\epsilon'_{21} &= -i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_B} G \left[\frac{2J_0 J_1}{\xi} - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2J_1}{\xi} \left(\frac{2J_1}{\xi} - J_0 \right) \xi_0 \omega_M \right] d\epsilon_{\perp} dv_z; \\ \epsilon'_{13} = \epsilon'_{31} &= - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{mk\omega^2} \int v_z G \left[\left(1 - J_0^2 - \xi_0 \omega_M \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times J_0 \left(J_0 - \frac{2J_1}{\xi} \right) \right) \right] d\epsilon_{\perp} dv_z. \end{aligned} \quad (13.51)$$

Здесь $\omega_M = k_y \kappa_B \epsilon_{\perp} / \omega_B$ — «частота магнитного дрейфа»; $\epsilon_{\perp} \equiv v_{\perp}^2 / 2$.

При получении (13.51) использовалось уравнение равновесия

$$\kappa_B + 4\pi (p_{\perp l} + p_{\perp e}) \kappa_p / B_0^2 = 0, \quad (13.52)$$

вытекающее из (13.18), (13.19).

При $\xi \ll 1$, $ck \ll \omega_{pe}$ элементы первой строки и первого столбца определителя (13.50) малы как ξ^2 по сравнению с элементами правой нижней матрицы второго порядка этого определителя. Поэтому в пренебрежении малыми членами порядка ξ^2 дисперсионное уравнение (13.50) расщепляется на два:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{22}^{(0)} - N^2 & \epsilon_{23}^{(0)} \\ \epsilon_{32}^{(0)} & \epsilon_{33}^{(0)} \end{vmatrix} = 0; \quad (13.53)$$

$$\epsilon'_{11}^{(0)} - N^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (13.54)$$

где в элементах ϵ_{22} , ϵ_{23} , ϵ_{32} , ϵ_{33} , ϵ'_{11} должны быть оставлены только старшие по ξ^2 члены (это обозначено верхним индексом 0). Из (13.38) и (13.51) следует:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{22}^{(0)} &= \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2 k_{\perp}^2}{m\omega^2 \omega_B^2} \int \varepsilon_{\perp}^2 G_{\zeta_0}^* d\varepsilon_{\perp} dv_z; \\ \varepsilon_{23}^{(0)} &= -\varepsilon_{32}^{(0)} = i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2 k_{\perp}}{m\omega^2 \omega_B} \int v_z \varepsilon_{\perp} G_{\zeta_0}^* d\varepsilon_{\perp} dv_z; \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int v_z \left(\frac{\partial F}{\partial v_z} - v_z \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\perp}} + v_z G_{\zeta_0}^* \right) d\varepsilon_{\perp} dv_z; \end{aligned} \right\} (13.55)$$

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega \omega_B^2} \int \varepsilon_{\perp} G \left(1 - \frac{k_z v_z \cdot \omega_M}{\omega} \right) d\varepsilon_{\perp} dv_z. \quad (13.56)$$

В случае максвелловской плазмы, $F \sim \exp(-mv^2/2T)$ эти соотношения означают:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{22}^{(0)} &= - \sum_{i, e} \frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} \frac{1}{\kappa_B^2 d^2 \omega} \hat{l} \langle \omega_{M\zeta_0}^2 \rangle; \\ \varepsilon_{23}^{(0)} &= -\varepsilon_{32}^{(0)} = -i \sum_{i, e} \frac{k_{\perp}}{k_y} \frac{1}{\kappa_B d^2 \omega} \hat{l} \langle v_z \omega_M \zeta_0 \rangle; \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= - \sum_{i, e} \frac{1}{d^2 \omega} \hat{l} \langle v_z^2 \zeta_0 \rangle; \\ \varepsilon_{11}^{(0)} &= \frac{c^2}{c_A^2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} - \frac{\Omega_i}{\omega} + \sigma \frac{\omega_{pi}^* \Omega_i}{\omega^2} \right). \end{aligned} \right\} (13.57)$$

Здесь оператор \hat{l} означает то же самое, что и в (4.102); символ $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по максвелловскому распределению:

$$\langle \dots \rangle = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \frac{m}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2T}\right) dv_z \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m\varepsilon_{\perp}}{T}\right) (\dots) d\varepsilon_{\perp}; \quad (13.59)$$

$\sigma \equiv (1 + 2\eta)/(1 + \eta)$; $\Omega_i \equiv \langle \omega_{Mi} \rangle$ — частота среднего магнитного дрейфа ионов.

Заметим, что аналогичное расщепление дисперсионного уравнения на два имеет место и в случае однородной плазмы. Аналогом дисперсионного уравнения (13.53) в однородной плазме является дисперсионное уравнение для магнитно-звуковых волн, а аналогом (13.54) — уравнение для альфвеновских волн. В связи с этим возмущения, описываемые уравнением (13.53), будем называть возмущениями магнитно-звукового типа, а описываемые уравнением (13.54) — возмущениями альфвеновского типа.

Гидродинамический анализ структуры дисперсионных уравнений (13.53) и (13.54) обнаруживает, что в возмущениях магнитно-звукового типа не важна поперечная инерция ионов (имеются в виду медленные магнитно-звуковые волны, $\omega/k_{\perp} \ll c_A$), тогда как в возмущениях альфвеновского типа поперечная инерция ионов играет определяющую роль. Учитывая это, возмущения типа (13.53) будем также называть безынерционными, а возмущения типа (13.54) — инерционными.

При $k_z = 0$ дисперсионное уравнение безынерционных возмущений (13.53) расщепляется еще на два уравнения:

$$\varepsilon_{22}^{(0,0)} - N^2 = 0; \quad (13.60)$$

$$\varepsilon_{33}^{(0,0)} = 0, \quad (13.61)$$

где вторые верхние индексы 0 у ε_{22} и ε_{33} означают, что эти величины берем при $k_z = 0$. Первое из этих уравнений соответствует возмущениям с $\mathbf{E}_{\perp} \perp \mathbf{B}_0$, а второе — возмущениям с $\mathbf{E}_{\perp} \parallel \mathbf{B}_0$.

Согласно (13.55),

$$\varepsilon_{22}^{(0,0)} = \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2 k_{\perp}^2}{m\omega \omega_B^2} \int \frac{\varepsilon_{\perp}^2 d\varepsilon_{\perp}}{\omega - \omega_M} \left(\frac{\partial F_{\perp}}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_y}{\omega \omega_B} \frac{\partial F_{\perp}}{\partial x} \right), \quad (13.62)$$

где $F_{\perp} = \int F dv_z$. Если ввести также величину $\varepsilon_{00}^{(0,0)}$ — скаляр диэлектрической проницаемости, взятый при $\xi \rightarrow 0$, $k_z = 0$, то, используя (13.38) и условие равновесия (13.52), можно получить соотношение

$$\varepsilon_{00}^{(0,0)} = \left(\frac{\kappa_B k_y}{k^2} \right)^2 (\varepsilon_{22}^{(0,0)} - N^2). \quad (13.63)$$

Поэтому дисперсионное уравнение безынерционных возмущений с $k_z=0$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{V}_0$ [см. (13.60)] может быть записано в виде

$$\varepsilon_{00}^{(0,0)} = 0. \quad (13.64)$$

Это означает, что соответствующие возмущения могут быть изучены в приближении потенциального электрического поля, хотя на самом деле они непотенциальные.

Из выражений (13.56) видно, что если в приближении $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$ безынерционные возмущения могут взаимодействовать с резонансными частицами (такое резонансное взаимодействие учитывается фактором $\zeta_0 \equiv (\omega - k_z v_z - k_y u_B)^{-1}$), то в том же приближении резонансное взаимодействие альфвеновских волн отсутствует. Поэтому для исследования резонансного взаимодействия альфвеновских волн с частицами необходимо дополнить дисперсионное уравнение (13.54) членами, малыми как $(k_{\perp} \rho_i)^2$. (Аналогичная проблема возникает и в случае плазмы низкого давления, § 13.8.)

При учете членов порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2$ вместо (13.54) из (13.50) получаем дисперсионное уравнение

$$Q^{(0)}(\omega) + Q^{(1)}(\omega) = 0. \quad (13.65)$$

Здесь $Q^{(0)}(\omega)$ — левая часть (13.54), т. е.

$$Q^{(0)}(\omega) \equiv \varepsilon_{11}'^{(0)} - N^2 \cos^2 \theta, \quad (13.66)$$

а выражение для $Q^{(1)}(\omega)$ имеет вид

$$Q^{(1)} = \frac{1}{A_{11}} (\varepsilon_{12}' A_{12} + \varepsilon_{13}' A_{13}), \quad (13.67)$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы (13.50).

Библиографический обзор к гл. 13

1. Церковников Ю. А. Устойчивость плазмы в сильном магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 32, с. 67. В этой работе впервые были получены дисперсионные уравнения для низкочастотных, $\omega \ll \omega_{Bi}$, длинноволновых, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$, возмущений плазмы с произвольным β , распространяющихся поперек магнитного поля [уравнения (13.60) и (13.54) с $k_z=0$].
2. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. Колебания неоднородной плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 37, с. 1337.

Методом дрейфового кинетического уравнения было получено дисперсионное уравнение (13.60).

3. Михайловский А. Б. Диэлектрические свойства неоднородной плазмы.—«Ядерный синтез», 1962, т. 2, с. 162. Получен тензор диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы с произвольным значением параметра β . Показано, что при использовании тензора диэлектрической проницаемости в задачах о градиентных неустойчивостях необходим учет производных этого тензора по координатам. Развита схема исследования колебаний неоднородной плазмы с использованием скалярной диэлектрической проницаемости. Получены уравнения колебаний плазмы низкого давления, § 13.8.
4. Михайловский А. Б., Рудаков Л. И. К вопросу об устойчивости пространственно-неоднородной плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 912. Методом дрейфового кинетического уравнения и гидромагнитных уравнений, учитывающих «магнитную вязкость», получены уравнения для низкочастотных длинноволновых колебаний плазмы низкого давления, § 13.8.
5. Михайловский А. Б. Колебания неоднородной плазмы.—В кн.: «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3, М., Госатомиздат, 1963, с. 141. Приведен тензор диэлектрической проницаемости для максвелловской плазмы низкого давления.
6. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. О дрейфовой неустойчивости в плотной плазме.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 45, с. 1566. В задачах о градиентных неустойчивостях плазмы с малым β предложено использовать скалярный и векторный потенциалы. Получено уравнение вида (13.16).
7. Krall N. A., Rosenbluth M. N. Low frequency stability of nonuniform plasmas.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 254. Методом интегрирования по траекториям выведены уравнения (13.54), (13.60), (13.61) с $k_z=0$ для плазмы с $\nabla T=0$.
8. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. Желобковые возмущения плазмы в винтовом магнитном поле.—«Ядерный синтез», 1963, т. 3, с. 276. Получены уравнения (13.65) — (13.67) для возмущений максвелловской плазмы с $k_z=0$.
9. Михайловский А. Б., Фридман А. М. Дрейфовые волны в плазме конечного давления.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 51, с. 1430. Показано, что дисперсионное уравнение для градиентных возмущений плазмы с малым β при $\omega/\omega_{Bi} \rightarrow 0$, $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$ и произвольных k_z расщепляется на два уравнения, соответствующие волнам магнитно-звукового и альфвеновского типов, § 13.9. Получены дисперсионные уравнения (13.53), (13.54) для возмущений максвелловской плазмы при $k_z \neq 0$.
10. Михайловский А. Б., Фридман А. М. Резонансное взаимодействие с частицами волн альфвеновского типа в неоднородной плазме конечного давления.—«Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1782. Получены уравнения (13.65) — (13.67) при $k_z \neq 0$.

Глава 14

НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ПЛАЗМЫ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

§ 14.1. Введение

Переходим к исследованию градиентных неустойчивостей плазмы с ненулевым значением параметра β . В § 14.2 рассмотрим низкочастотные $\omega \ll \omega_{Vi}$ неустойчивости бесстолкновительной плазмы с неоднородной плотностью $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$ при $\beta > m_e/m_i$. При $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ эти неустойчивости связаны с раскачкой альфвеновских волн.

Согласно § 14.2, инкременты неустойчивостей бесстолкновительной плазмы с $\nabla n_0 = 0$, $\nabla T = 0$ убывают с ростом параметра β . Если же β превышает некоторое критическое значение, то, как показано в § 14.3, низкочастотные возмущения бесстолкновительной плазмы затухают, т. е. с ростом параметра β имеет место эффект стабилизации. Аналогичный анализ неустойчивостей столкновительной плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$ производится в § 14.4–14.7, где показано, что если параметр β превышает некоторое критическое значение, то неустойчивость столкновительной плазмы, обусловленная конечной проводимостью, подавляется.

В отличие от неустойчивостей плазмы с $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$ неустойчивости плазмы с $\nabla T \neq 0$ менее чувствителен к росту параметра β (см. § 14.8), хотя и в этом случае с ростом параметра β также обнаруживается ряд специфических эффектов.

Другие разновидности непотенциальных неустойчивостей плазмы с ненулевым β обсуждаются в § 14.9–14.11: в § 14.9 показано, что возможна раскачка альфвеновских волн в струе плазмы, движущейся вдоль магнитного поля с неоднородным профилем скорости; в § 14.10 рассмотрена желобковая неустойчивость плотной плазмы и ее стабилизация проводящими торцами, а в § 14.11 — непотенциальная неустойчивость, связанная с раскачкой возмущений типа обыкновенной волны, распространяющейся поперек магнитного поля.

§ 14.2. Неустойчивости плазмы с неоднородной
плотностью при $\beta > m_e/m_i$

В § 6.1 было показано, что в плазме с неоднородной плотностью $\nabla n_0 \neq 0$ и однородной температурой $\nabla T = 0$ наибольшим инкрементом обладают возмущения с $\omega > k_z v_{Te}$. Этот результат был получен в приближении потенциальных возмущений $E \approx -\nabla \psi$. Согласно § 13.8, это приближение оправдано, если только $\omega < k_z c_A$, где $c_A = B_0 / (4\pi m_i n_0)^{1/2}$ — скорость Альфвена. Условия $\omega \geq k_z v_{Te}$ и $\omega < k_z c_A$ совместимы, если только $v_{Te} < c_A$, т. е. при $\beta \equiv 8\pi p / B_0^2 < m_e/m_i$. Именно при таких β и справедливы результаты § 6.1, касающиеся возмущений с $\omega > k_z v_{Te}$.

Теперь будем предполагать, что давление плазмы не слишком мало, $\beta > m_e/m_i$. Исследуем неустойчивости такой плазмы, полагая $\nabla n_0 \neq 0$, $\nabla T = 0$, $T_e = T_i = T$.

1. Раскачка длинноволновых возмущений, $z_i \ll 1$. Исходя из уравнения (13.46), рассмотрим низкочастотные, $\omega \ll \omega_{Vi}$, и длинноволновые, $z_i \ll 1$, возмущения с фазовой скоростью ω/k_z , меньшей тепловой электронной и большей тепловой ионной, $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$. При этих предположениях из (13.46) с учетом (13.47) получаем:

$$\left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}\right) \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_y| v_{Te}}\right) \times \\ \times \left[1 - \frac{\omega^2}{c_A^2 k_z^2} \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right)\right] + z_i \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) = 0. \quad (14.1)$$

Видно, что последний член левой части равенства мал как z_i . Если этим членом пренебречь, то получим:

$$\omega_{1,2} = -\frac{|\omega_{ni}|}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_{ni}}{2}\right)^2 + (k_z c_A)^2}; \quad (14.2)$$

$$\omega_3 = \omega_{ne}. \quad (14.3)$$

Для определенности здесь предположено $\omega_{ne} \equiv -\omega_{ni} > 0$.

Первые два корня соответствуют колебаниям альфвеновского типа, а ω_3 — конвективной ветви, которая при $k_z \gg \omega_{ne}/c_A$ исследовалась в § 6.1 [см. (6.13)].

При $k_z c_A \approx \sqrt{2} \omega_{ne}$ корни ω_1 и ω_2 совпадают друг с другом. Учет отброшенного в уравнении (14.1) члена порядка z_i приводит к такому ходу кривых $\omega = \omega(k_z)$ вблизи этого k_z , который показан на рис. 14.1. При учете члена порядка z_i корни $\omega_{1,2,3}$ становятся комплексными.

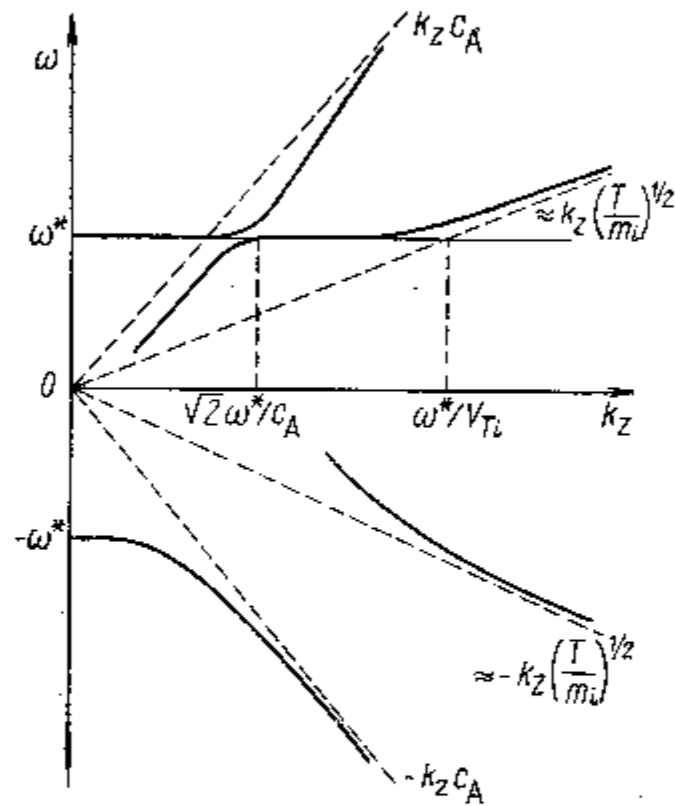


Рис. 14.1. Ветви колебаний неоднородной плазмы с $\beta > m_e/m_i$. Здесь $\omega_* \equiv \omega_{ne}$

Нарастающими оказываются колебания с $0 < \omega/\omega_{ne} < 1$. На рис. 14.1 этим колебаниям соответствуют участки кривых ω_1, ω_3 , лежащие между осью абсцисс и линией $\omega = \omega_{ne}$. Колебания ветви ω_2 при всех k_z затухают.

Максимальным инкрементом обладают колебания, частота которых лежит вблизи точки пересечения ветвей на рис. 14.1, т. е. при

$$k_z = \sqrt{2} \omega_{ne}/c_A. \quad (14.4)$$

При этом

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \omega_{ne} \left(\frac{m_e}{m_i \beta} z_i \right)^{1/2}. \quad (14.5)$$

Согласно (14.5), инкремент растет с уменьшением поперечной длины волны $\gamma \sim k_{\perp}^2$. На пределах применимости приближения $z_i \ll 1$ — при $z_i \approx 1$, имеем:

$$\gamma_{\max} \approx (m_e/m_i \beta)^{1/2} v_{Ti}/a. \quad (14.6)$$

Из сравнения (14.5), (14.6) с (6.15), (6.17) видно, что плазма с $\beta > m_e/m_i$ более устойчива относительно возмущений с $z_i \leq 1$, чем плазма с $\beta < m_e/m_i$.

2. **Коротковолновые возмущения, $z_i \geq 1$.** При $z_i \geq 1$ и $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$ уравнение (13.46) сводится к следующему:

$$\left(1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega}\right) \left[1 - \frac{\omega(\omega - \omega_{ni})}{k_z^2 c_A^2} \frac{1 - I_0 \exp(-z_i)}{z_i}\right] + \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) [1 - I_0 \exp(-z_i)] = 0. \quad (14.7)$$

Отсюда следует, что с ростом z_i отношение ω/ω_{ne} для ветви колебаний с $\gamma > 0$ уменьшается (на рис. 14.1 щель между «пересекающимися» кривыми расширяется). При $z_i \gg 1$ можно принять $\omega \ll \omega_{ne}$, и тогда (14.7) сводится к уравнению

$$2 + \frac{-\omega \omega_{ne}}{(k_z c_A)^2} - \frac{\omega_{ne}}{\omega \sqrt{2\pi} z_i} - \frac{i \sqrt{\pi} \omega_{ne}}{|k_z| v_{Te}} = 0. \quad (14.8)$$

Оно отличается от (6.18) наличием непотенциального слагаемого $\sim 1/c^2$.

Полагая $\gamma/\text{Re } \omega \ll 1$, из (14.8) находим [ср. с (6.20)]:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= \frac{\omega_{ne}}{\sqrt{2\pi} z_i} \frac{1}{2 + \beta \kappa_n^2 k_y^2 / k_z^2 k_{\perp}^2}; \\ \gamma &= \sqrt{\pi} \omega_{ne} \text{Re } \omega / |k_z| v_{Te}. \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Как функция k_z , γ имеет максимум, равный

$$\gamma_{\max} = (m_e/m_i \beta)^{1/2} \omega_{ne} / 2\sqrt{2}. \quad (14.10)$$

Этот максимум достигается при

$$k_{z \text{ опт}} = \kappa_n (\beta/8)^{1/2}. \quad (14.11)$$

Условие $\gamma_{\max}/\text{Re } \omega \ll 1$ нарушается при $z_i \geq \beta m_i/m_e$. При столь больших z_i непотенциальность для возмуще-

ний с максимальным инкрементом не важна, так что уравнение (14.6) в этом случае сводится к (6.18), а максимальный инкремент и оптимальное k_z даются соотношениями (6.20), (6.19). Качественно зависимости $k_{z \text{ опт}} = k_{z \text{ опт}}(z_i)$, $\gamma_{\text{макс}} = \gamma_{\text{макс}}(z_i)$ представлены на рис. 14.2 и 14.3.

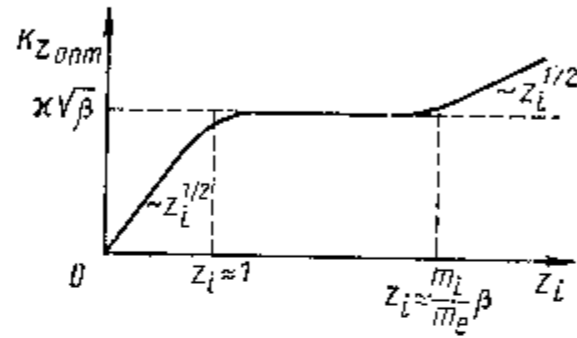


Рис. 14.2. Зависимость продольного волнового числа $k_{z \text{ опт}}$, соответствующего максимальному инкременту при $\beta > m_e/m_i$, $\nabla T=0$, от z_i

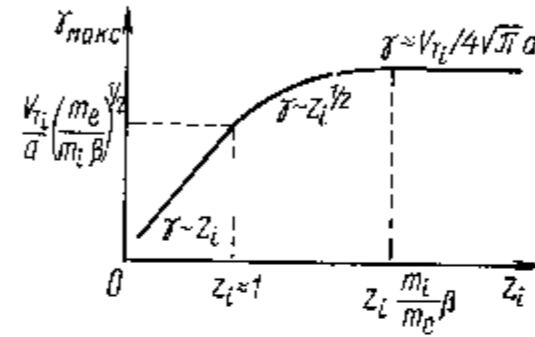


Рис. 14.3. Зависимость $\gamma_{\text{макс}}$ от z_i для плазмы с $\beta > m_e/m_i$, $\nabla T=0$

§ 14.3. Стабилизация неустойчивостей, обусловленных градиентом плотности, с ростом давления плазмы

В отличие от § 14.2 учтем взаимодействие с колебаниями резонансных ионов. Сначала оценим порядок величины этого эффекта.

Пусть $z_i \ll 1$. В пренебрежении резонансными ионами имеем инкремент (14.5), достигаемый при $\omega \approx \approx k_z c_A / \sqrt{2} \approx \omega_{ne}$. Число ионов, движущихся вдоль поля со скоростью, близкой к ω/k_z , характеризуется экспонентой вида

$$\exp(-\omega^2/k_z^2 v_{Ti}^2) \approx \exp(-1/2\beta_i). \quad (14.12)$$

Эта величина мала при малых β . Однако и отношение инкремента (14.5) к частоте колебаний ω_{ne} также мало. Поэтому при не слишком малом β , хотя и меньшем единицы, резонансные ионы окажутся существенными.

Экспонента типа (14.12) получается в предположении, что резонансными являются ионы, у которых $v_z =$

$= \omega/k_z$. Это «продольный» резонанс. Частицы, однако, движутся не только вдоль силовых линий, но и поперек, — со скоростью магнитного дрейфа (13.33). Вследствие магнитного дрейфа имеет место «поперечный» резонанс (см. § 13.7). При этом резонансными являются частицы, у которых $u_B(v_{\perp}^2) = \omega/k_y$. При $\omega \approx k_y V_{ne}$ число таких частиц пропорционально экспоненте

$$\exp(-\omega/k_y u_B) \approx \exp(-1/\beta_i). \quad (14.13)$$

Видно, что при учете продольного ионного резонанса (14.12), вообще говоря, необходимо учитывать и поперечный резонанс. Это особенно важно при $z_i \gg 1$, когда $\omega/k_y \ll V_{ne}$ [см. (14.9)], и, следовательно, $\exp(-\omega/k_y u_B) \gg \gg \exp(-1/\beta_i)$.

Теперь перейдем к количественному рассмотрению ионных резонансов. Исходим из уравнения (13.41) с ϵ_{00} , ϵ_{zz} , ϵ_{zz} вида (13.38). Из него в приближении $\beta \ll 1$, $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$, $\omega \gg k_y u_B$ следует

$$2 - I_0 \exp(-z) \left(1 + \frac{\omega_*}{\omega}\right) + \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{k_z^2 c_A^2} \frac{1 - I_0 \exp(-z)}{z} + \\ + i \sqrt{\pi} S \left\{ \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega}\right) + \frac{\omega}{|k_z| v_{Ti}} \left(1 + \frac{\omega_*}{\omega}\right) Q \right\} = \\ = 0. \quad (14.14)$$

Здесь

$$S = 1 - \left(\frac{\omega}{k_z c_A}\right)^2 \frac{1 - I_0 \exp(-z)}{z} \left(1 + \frac{\omega_*}{\omega}\right); \\ Q = \int_0^{\infty} J_0^2(\sqrt{2\epsilon_{\perp} z}) \exp\left[-\epsilon_{\perp} - \frac{(\omega - \Omega_i \epsilon_{\perp})^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}\right] d\epsilon_{\perp}; \quad (14.15) \\ \omega_* = \omega_{ne} = -\omega_{ni}; \quad T_e = T_i; \quad z = z_i; \quad \Omega_i = \\ = k_y \kappa_B T_i / m_i \omega B.$$

Мнимые члены в (14.14) соответствуют резонансному взаимодействию с волной электронов — слагаемое с $\omega/k_z v_{Te}$ и ионов — слагаемое с интегралом Q . Вещественная часть этого уравнения такая же, как и в (13.46) с ϵ_{\perp} , ϵ_{\parallel} вида (13.47). Поэтому картина ветвей колебаний, полученная в предыдущем параграфе, оста-

ется прежней. Знак инкремента определяется обратным знаком выражения в фигурной скобке (14.14). Из этого следует, что резонансные ионы приводят к затуханию колебаний (поскольку $\omega_*/\omega > 0$).

Выясним, при каких условиях становится невозможной раскачка колебаний, т. е. найдем «границу неустойчивости». Полагая в (14.14) $\text{Im } \omega = 0$ и разделяя вещественные и мнимые члены, имеем

$$2 - I_0 \exp(-z) \left(1 + \frac{\omega_*}{\omega}\right) + \frac{\omega_*^2 - \omega^2}{k_z^2 c_A^2} \frac{1 - I_0 \exp(-z)}{z} = 0; \quad (14.16)$$

$$1 - \frac{\omega_*}{\omega} + \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\omega_*}{\omega}\right) G = 0. \quad (14.17)$$

Из (14.17) следует, что ионное затухание минимально при максимальном ω/k_z , т. е. при $k_z = k_z^0$, удовлетворяющем соотношению

$$\partial(\omega/k_z)/\partial k_z|_{k_z=k_z^0} = 0. \quad (14.18)$$

Зависимость $k_z^0 = k_z^0(z, \beta)$ находим из (14.16)

$$(k_z^0)^2 = \lambda \beta \kappa^2 |1 - I_0 \exp(-z)| (k_y/k_\perp)^2/2, \quad (14.19)$$

где

$$\lambda = \lambda(z) \equiv [(1 - \sqrt{1 - I_0 \exp(-z)})/I_0 \exp(-z)]^2. \quad (14.20)$$

Соответствующее значение частоты $\omega = \omega(k_z^0)$ равно

$$\omega = \omega_* \lambda I_0 \exp(-z). \quad (14.21)$$

Из (14.19)–(14.21) в предельных случаях малых и больших z следует:

$$\lambda = 1; \quad (k_z^0)^2 = \beta \kappa^2 z (k_y/k_\perp)^2/2; \quad \omega = \omega_*; \quad z \ll 1; \quad (14.22)$$

$$\lambda = 1/4; \quad (k_z^0)^2 = \beta \kappa^2 (k_y/k_\perp)^2/8; \quad \omega = \omega_*/4 \sqrt{2\pi z}; \quad z \gg 1. \quad (14.23)$$

Это те самые значения частоты и продольного волнового числа, при которых в пренебрежении ионным затуханием имеет место неустойчивость с максимальным инкрементом [ср. с (14.3), (14.4), (14.9), (14.11)].

Исключая из (14.17) с помощью уравнений (14.19), (14.21) частоту колебаний, получаем искомую зависимость граничного значения β от поперечного волнового числа k_\perp :

$$\frac{1 - \lambda I_0 \exp(-z)}{1 + \lambda I_0 \exp(-z)} = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \int_0^\infty J_0^2(\sqrt{2z\varepsilon_\perp}) \times \\ \times \exp\left\{-\varepsilon_\perp - \frac{z[\lambda I_0 \exp(-z) - \beta \varepsilon_\perp/2]^2}{\lambda \beta [1 - I_0 \exp(-z)]}\right\} d\varepsilon_\perp. \quad (14.24)$$

С помощью (14.23) убеждаемся, что продольное затухание преобладает над поперечным (из-за магнитного дрейфа) при $z < z_0 \approx 8\pi$. Поэтому вплоть до таких значений z вместо (14.24) можно пользоваться упрощенным уравнением:

$$\frac{1 - \lambda I_0 \exp(-z)}{1 + \lambda I_0 \exp(-z)} = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} I_0 \exp(-z) \exp[-\mu(z)/\beta]; \quad (14.25) \\ \mu(z) = \frac{z \lambda [I_0 \exp(-z)]^2}{1 - I_0 \exp(-z)}.$$

При $z > z_0$, опуская продольное затухание и учитывая только поперечное, получаем приближенно

$$1 = \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{2\pi}{z^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{\beta \sqrt{2\pi z}}\right). \quad (14.26)$$

Здесь мы воспользовались приближенным выражением для $J_0^2(x)$ при больших x : $J_0^2(x) \rightarrow 1/\pi x$.

Выражение для границы устойчивости $\beta = \beta(z)$, как следует из (14.25), (14.26), имеет вид

$$\beta = \mu(z) \left\{ \ln \left[\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} I_0 \exp(-z) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1 + \lambda I_0 e^{-z}}{1 - \lambda I_0 e^{-z}} \right] \right\}^{-1} \quad \text{при } z < 8\pi; \quad (14.27)$$

$$\beta = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{2\pi}{z^3} \right] \right\}^{-1} \quad \text{при } z > 8\pi. \quad (14.28)$$

Максимум функции $\beta = \beta(z)$ (рис. 14.4) достигается при $z_1 \approx 10^{-1}$ и приближенно равен

$$\beta_{\text{макс}} \approx 0,13. \quad (14.29)$$

При $z \approx (m_i/m_e)^{2/3}$ мнимые члены уравнения (14.14) становятся порядка вещественных. Границу неустойчивости при таких больших z удается определить лишь качественно. Учитывая, что $\omega \approx \omega_* / 4 \sqrt{2\pi z}$ (см. (14.23)],

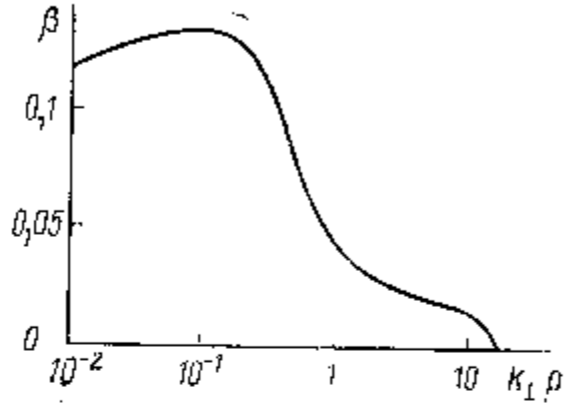


Рис. 14.4. График функции $\beta = \beta(k_{\perp} \rho)$. Устойчивости соответствует область над кривой $\beta = \beta(k_{\perp} \rho)$.

и полагая $\omega \approx k_y u_B$, находим, что закон $\beta \sim z^{1/2}$ [см. (14.27)] остается в силе и при $z > (m_i/m_e)^{2/3}$. При еще больших z нарушается условие $\omega > k_z v_{Ti}$ (ср. с § 6.1), вследствие чего неустойчивость исчезает при всех β . Это имеет место, если $z \geq m_i / 2 \pi m_e$.

§ 14.4. Об уравнениях непотенциальных возмущений столкновительной плазмы низкого давления

Согласно § 13.8, в непотенциальных возмущениях плазмы с $\beta \ll 1$ можно полагать $B'_z = 0$, $\text{rot } E'_{\perp} = 0$. Следовательно, при изучении таких возмущений в условиях частых столкновений можно исходить из макроскопических уравнений § 7.2, 7.3, добавив в эти уравнения только члены с \mathbf{V}'_{\perp} .

При учете \mathbf{V}'_{\perp} кинетическое уравнение Больцмана сводится к уравнениям (7.16), (7.17), в которых оператор \hat{L}_{\perp} заменяется на $\hat{L}_{\perp} + \delta \hat{L}_{\perp}$, где

$$\delta \hat{L}_{\perp} = \frac{e}{mc} (v_z^{(a)} + V_z^{(a)}) \left[\mathbf{V}'_{\perp}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{\perp}} \right]_z + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{V}'_{\perp}]_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{14.30}$$

Используя этот результат, таким же путем, как и в § 7.2, можно получить систему трех уравнений для $n_a, V_z^{(a)}, T_a$.

которая в интересующем нас случае $\nabla V_z^{(a)} = 0$ отличается от (7.34), во-первых, заменой

$$\mathbf{V}_E \rightarrow \mathbf{V}_E + V_z^{(a)} \mathbf{V}'_{\perp} / B_0 \tag{14.31}$$

и, во-вторых, наличием в правой части уравнения движения члена

$$\delta \left(m_a n_a \frac{DV_z^{(a)}}{Dt} \right) \equiv - \frac{\mathbf{V}'_{\perp}}{B_0} (\nabla p_a - e_a n_a \mathbf{E}_{\perp}). \tag{14.32}$$

Предполагая, что продольный ток в плазме отсутствует, $V_{ze}^{(0)} = V_{zi}^{(0)}$, заключаем, что при учете \mathbf{V}'_{\perp} все уравнения линеаризованной системы (7.72), кроме уравнений движения, остаются неизменными. В правую часть электронного уравнения движения добавляется член $(-e_e n_0 \omega_{pe}^* A_z / c)$, а в правую часть уравнения движения плазмы [четвертое уравнение системы (7.72)] — член $[-i e n_0 (\omega_{pe}^* / c) A_z (1 + T_i / T_e)]$. Кроме того, теперь надо считать $E_z = -i k_z \psi + i \omega A_z / c$, а систему уравнений, получающуюся указанным выше способом из (7.72), необходимо дополнить уравнением Максвелла для \mathbf{V}'_{\perp} :

$$(\text{rot } \mathbf{V}'_{\perp})_z \equiv -k_{\perp}^2 A_z = 4\pi j_z / c. \tag{14.33}$$

§ 14.5. Общий критерий применимости приближения $\beta \rightarrow 0$ в случае неустойчивостей, связанных с конечной проводимостью

В гл. 7, 8 при изучении неустойчивостей плазмы нулевого давления, $\beta \rightarrow 0$, мы полагали возмущения потенциальными. Это предположение приводит к существенному упрощению уравнения движения электронов. Если при учете непотенциальности возмущений, $A_z \neq 0$, это уравнение имеет вид (оно получается способом, указанным в § 14.4)

$$e_e (-i k_z \psi + i \omega A_z / c) + e_e V_{0e} B'_x / c - - i k_z (p'_e / n_0 + s T'_e) - v_e m_e (V_{ze} - V_{zi}) = 0, \tag{14.34}$$

то в потенциальном приближении ($A_z = 0$) вместо этого имеем

$$-ie_e k_z \psi - ik_z (p'_e/n_0 + sT'_e) - v_e m_e (V_{ze} - V_{zi}) = 0. \quad (14.35)$$

Здесь $V_{0e} = (cT_0/e_e B_0) \partial \ln n_0 / \partial x$ — скорость ларморовского тока электронов; T_0 — невозмущенная температура плазмы, которую мы полагаем не зависящей от координат, $\nabla T_0 = 0$.

Так как, согласно (14.33),

$$k_{\perp}^2 A_z = (4\pi/c) e_e n_0 (V_{ze} - V_{zi}), \quad (14.36)$$

то из (14.34) следует

$$V_{ze} - V_{zi} = \frac{ik_z}{v_e m_e \lambda} \left(e_e \psi + \frac{p'_e}{n_0} + sT'_e \right), \quad (14.37)$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{i(\omega - \omega_{ne})}{v_e} \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_{\perp}^2}. \quad (14.38)$$

Из (14.35) получается выражение для $V_{ze} - V_{zi}$, которое отличается от (14.37) заменой $\lambda \rightarrow 1$. Это означает, что потенциальное приближение справедливо, если только

$$\frac{|\omega - \omega_{ne}|}{v_e} \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_{\perp}^2} \ll 1. \quad (14.39)$$

В случае возмущений с $k_{\perp} \approx |\partial \ln n_0 / \partial x|$, приводящих к максимальным коэффициентам переноса плазмы поперек магнитного поля, условие (14.39) качественно означает

$$\beta \ll v_e / \omega_{Be}, \quad (14.40)$$

где ω_{Be} — циклотронная частота электронов.

§ 14.6. Непотенциальная инерционно-диссипативная неустойчивость

1. **Исходные уравнения.** Исследование непотенциальной инерционно-диссипативной неустойчивости можно проводить по схеме, аналогичной случаю потенциальной неустойчивости (см. гл. 7, 8), если ввести множитель λ в знаменатель правой части (14.37).

Полагаем параметр β лежащим в интервале $v_e / \omega_{Be} \ll \beta \ll 1$ и рассмотрим непотенциальные возмущения в пренебрежении возмущенным движением ионов, $V_{zi} = 0$, и возмущениями электронной и ионной температур, $T'_e = T'_i = 0$. (Все эти факторы, важные при не слишком малых β , учитываются в § 14.7.)

Используя (14.37) и линеаризованное уравнение движения электронов

$$-i\omega n'_e + (cE_y/B_0) \partial n_0 / \partial x + in_0 k_z V_{ze} = 0, \quad (14.41)$$

находим выражение для возмущенной плотности электронов:

$$n'_e = -\psi n_0 \left[\frac{ck_y \chi_n}{B_0 \omega} + \frac{ie_e k_z^2 (1 - \omega_{ne}/\omega)}{m_e v_e (\lambda \omega + ik_z^2 n_0 / m_e v_e)} \right]. \quad (14.42)$$

Поскольку, в соответствии со сказанным выше, мы пренебрегаем продольным движением ионов, то поведение ионной компоненты определяется только полем E_{\perp} (но не E_z). Поэтому выражение для плотности ионов n'_i остается таким же, как и в потенциальном приближении. Для нахождения n'_i используем уравнение непрерывности ионов:

$$-i\omega n'_i + (cE_y/B_0) \partial n_0 / \partial x + ik_{\perp} \mathbf{V}_{\perp i}^{(1)} (1 + \omega_{ne}/\omega) n_0 = 0, \quad (14.43)$$

в котором $\mathbf{V}_{\perp i}^{(1)}$ означает инерционную часть скорости ионов:

$$\mathbf{V}_{\perp i}^{(1)} = -i\omega e_i \mathbf{E}_{\perp} / m_i \omega_{Bi}^2, \quad (14.44)$$

а член с ω_{ne}/ω учитывает магнитную вязкость (подробности см. в гл. 7, 8). В результате из (14.43) следует

$$n'_i = -\psi n_0 \left[\frac{ck_y \chi_n}{B_0 \omega} + \frac{e_i k_{\perp}^2 (1 + \omega_{ne}/\omega)}{m_i \omega_{Bi}^2} \right]. \quad (14.45)$$

Приравнивая правые части соотношений (14.42) и (14.45), приходим к дисперсионному уравнению

$$(\omega - \omega_{ne}) (\omega^2 + \omega \omega_{ne} - k_z^2 c_A^2) - z_i c_A^2 k_z^2 (\omega + \omega_{ne}) \times \\ \times (1 - i\omega v_e m_e / k_z T) = 0, \quad (14.46)$$

которое представляет собой обобщение дисперсионного уравнения (7.107)

$$\omega - \omega_{ne} + z_i (\omega + \omega_{ne}) (1 - i\omega v_e m_e / k_z^2 T) = 0, \quad (14.47)$$

описывающего потенциальную инерционно-диссипативную неустойчивость.

2. **Анализ дисперсионного уравнения.** Предварительно заметим, что неустойчивость, соответствующую дисперсионному уравнению потенциального приближения (14.47) при $k_{\perp} \approx 1/a_{\perp}$, $\text{Im } \omega \equiv \gamma \approx \omega_{ne} \approx cT/eB_0 a_{\perp}^2$ (a_{\perp} — размер, характеризующий неоднородность), иногда связывают с диффузией Бома. Решениям уравнения (14.47) с $k_{\perp} \approx 1/a_{\perp}$ и $\text{Im } \omega \approx \omega_{ne}$ соответствует $k_z \approx (v_e/\omega_{Be})^{1/2} \times \rho_i/a_{\perp}^2$. При таких значениях k_z , как следует из (14.46), потенциальное приближение справедливо, если только давление плазмы достаточно мало, так что удовлетворяется критерий (14.40).

Пусть теперь

$$\beta > v_e/\omega_{Be}. \quad (14.48)$$

При таких β члены с z_i в уравнении (14.46) малы, так что это уравнение может быть решено методом последовательных приближений, аналогично § 14.2. Полагая $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}$, в нулевом приближении по z_i получаем результат, который в точности соответствует случаю бесстолкновительной плазмы, рассмотренному в § 14.2. При этом имеем три ветви колебаний с вещественными частотами $\omega_{1,2,3}$, определенными соотношениями (14.2), (14.3). Мнимая добавка к частоте, обусловленная конечностью z_i , максимальна при $\omega_2 = \omega_3$, т. е. при $k_z = k_z^{(0)}$, где

$$k_z^{(0)} = \sqrt{2} \omega_{ne}/cA. \quad (14.49)$$

При этом из (14.46) следует

$$[\omega^{(1)}]^2 = (4/3) z_i \omega_{ne}^2 [1 - i2v_{ie}/(\beta\omega_{ne})]^{1/2}, \quad (14.50)$$

где $v_{ie} \equiv (m_e/m_i)v_e$ — частота ионно-электронных столкновений.

Подправка к частоте $\omega^{(1)}$ мала по сравнению с ω_{ne} . Из этого вытекает важное обстоятельство: при $\beta > v_e/\omega_{Be}$ инерционно-диссипативная неустойчивость не

может приводить к турбулентным потерям плазмы порядка боровских.

При фиксированных v_{ie}/ω_{ne} и ρ_i/a_{\perp} инкремент нарастания возмущений убывает с ростом β . Возмущения с $k_{\perp} a_{\perp} \approx 1$ в плазме с $v_{ie}/\omega_{Be} < \beta < v_{ie}/\omega_{ne}$ имеют инкремент

$$\gamma \approx \left(\frac{v_{ie}}{\omega_{Be}\beta} \right)^{1/2} \frac{cT}{eB_0 a_{\perp}^2}. \quad (14.51)$$

Если же $\beta > v_{ie}/\omega_{ne}$, то инкремент нарастания таких возмущений оказывается еще меньше:

$$\gamma \approx (\rho_i/a_{\perp}) (v_{ie}/\beta). \quad (14.52)$$

Из этого ясно, что инерционно-диссипативная неустойчивость в плазме с конечным β менее важна, чем при $\beta \rightarrow 0$. Более того, как будет показано в следующем параграфе, существует граничное β , при превышении которого эта неустойчивость отсутствует вовсе.

§ 14.7. Граница инерционно-диссипативной неустойчивости при конечных β

Теперь, в отличие от § 14.6, учтем возмущение продольной скорости ионов, $V_{zi} \neq 0$, и возмущения температур электронов и ионов, $T_e' \neq 0$, $T_i' \neq 0$.

При $V_{zi} \neq 0$ в левую часть уравнения непрерывности для ионов (14.43) должен быть добавлен член $ik_z V_{zi} n_0$ (ср. с (14.41)). Выражение для V_{zi} находим из уравнения продольного движения ионов

$$-im_i n_0 \omega V_{zi} = -ik_z (p_i' + p_e'). \quad (14.53)$$

В правой части равенства мы опустили член с магнитной силой, малый при $\lambda \gg 1$ (см. § 14.5).

Величины $p_e' = n_0 T_e' + n' T_0$ и $p_i' = n_0 T_i' + n' T_0$ определяются уравнениями теплового баланса электронов и ионов:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega p_e' + \Delta n_0 T_e' + V_E T_0 \alpha_n n_0 + i\gamma_0 V_{ze} k_z n_0 T_0 &= 0; \\ -i\omega p_i' + V_E T_0 \alpha_n n_0 + i\gamma_0 k_z V_{zi} n_0 T_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.54)$$

Здесь $V_E = cE_y/B_0$, $\gamma_0 = 5/3$, а член с $\Delta = (2/3) 3,16 k_z^2 T_0 \times (m_e v_e)^{-1}$ соответствует продольной теплопроводности

электронов. Уравнения (14.54) не учитывают теплообмена между электронами и ионами, который не важен, так как $\omega > \nu_{ie}$. Здесь более важен другой, учтенный нами диссипативный эффект, связанный с конечной электронной теплопроводностью [член с Δ в первом уравнении (14.54)]. Действительно, при k_z , определенном соотношением (14.49), имеем $\Delta/\omega \approx \nu_{ie}/\beta\omega_{ne} \gg \nu_{ie}/\omega_{ne}$.

Используя уравнения (14.53) и (14.54), приходим к следующему дисперсионному уравнению, которое представляет собой обобщение (14.46):

$$[\omega - \omega_{ne}(1 + \beta\zeta)](\omega^2 + \omega\omega_{ne} - k_z^2 c_A^2) - z_i c_A^2 k_z^2 (\omega + \omega_{ne})(1 - i\omega\nu_e m_e/k_z^2 T_0) = 0, \quad (14.55)$$

где

$$\zeta(\omega, k_z) = \frac{k_z^2 c_A^2}{2\omega_{ne} \omega^2 (\omega + i\Delta)} \{ \gamma_0 \omega^2 + s(\gamma_0 - 1)\omega\omega_{ne} + i(\Delta/2)[\omega(\gamma_0 + 1) - \omega_{ne}(\gamma_0 - 1)] \}. \quad (14.56)$$

Аналогично (14.50) отсюда следует

$$\omega^{(1)}(\omega^{(1)} - i\beta\omega_{ne} \text{Im} \zeta_0) = (4/3)z_i \omega_{ne}(1 - i2\nu_{ie}/\beta\omega_{ne}), \quad (14.57)$$

где $\zeta_0 = \zeta(\omega_{ne}, k_z^{(0)})$. Используя (14.57), можно найти границу неустойчивости, рассмотренной в § 14.6. Для этого полагаем в (14.57) $\text{Im} \omega^{(1)} = 0$ и разделяем вещественные и мнимые члены. В результате приходим к следующему уравнению для граничного β :

$$x^3 - c_1 z_i^{1/2} (1 + x^2) \omega_{ne}/\nu_{ie} = 0, \quad (14.58)$$

где $x = c_2 \beta \omega_{ne}/\nu_{ie}$; c_1, c_2 — положительные числа порядка единицы.

Используя (14.58), заключаем, что возмущения с $k_\perp a_\perp \approx 1$ не могут нарастать, если

$$\beta > \max(\nu_{ie}/\omega_{ne}; \rho_i/a_\perp). \quad (14.59)$$

Как следует из (14.57), выражение для инкремента нарастания (14.51) справедливо при условии $\nu_{ie}/\omega_{ne} < \beta < \rho_i/a_\perp$, которое непротиворечиво при

$$\rho_i/a_\perp > \nu_{ie}/\omega_{ne}. \quad (14.60)$$

Учитывая уравнения (14.54) — (14.57), можно убедиться, что физической причиной рассмотренного здесь стабилизирующего эффекта является конечная электронная теплопроводность (члены с Δ в первом уравнении (14.54)).

§ 14.8. Неустойчивости плазмы низкого давления с неоднородной температурой

1. **Длинноволновые низкочастотные неустойчивости.** Согласно § 14.2, при $\nabla n_0 \neq 0, \nabla T = 0$ инкремент нарастания возмущений с $\omega \ll \omega_{Bi}, k_\perp \rho_i \ll 1$ мал как параметр $(k_\perp \rho_i)^2$ (либо как $k_\perp \rho_i$) и убывает с увеличением давления плазмы. Нарастание возмущений в этом случае обусловлено связью между волнами ионно-звукового типа, описываемыми дисперсионным уравнением (13.48), и волнами альфвеновского типа, закон дисперсии которых определяется уравнением (13.49). Эта связь, учитываемая дисперсионным уравнением (13.46), мала при малом $(k_\perp \rho_i)^2$.

Такая чувствительность неустойчивостей плазмы с $\nabla T = 0$ к эффектам порядка $(k_\perp \rho_i)^2$ объясняется тем, что в пренебрежении связью с альфвеновскими волнами ионно-звуковые волны оказываются затухающими (при учете продольного движения ионов) либо обладают нулевым инкрементом (в пренебрежении продольным движением ионов). Если же $\nabla T \neq 0$, то дисперсионное уравнение (13.48) может иметь решения, соответствующие нарастающим колебаниям с $\gamma/\text{Re} \omega$, не зависящим от $(k_\perp \rho_i)^2$.

Заметим, что дисперсионное уравнение (13.48), описывающее непотенциальные возмущения с $E_\parallel \neq 0, E_\perp = 0$, совпадают с дисперсионным уравнением для потенциальных колебаний $\varepsilon_0 = 0$, если в последнем пренебрегается членами порядка $(k_\perp \rho_i)^2$, в чем можно убедиться, сравнив соответствующий предел уравнения (4.103) с уравнением (13.48). Поэтому результаты, получающиеся для потенциальных возмущений в приближении

$\omega/\omega_{Vi} \rightarrow 0$, $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$, совпадают с теми, которые вытекают из (13.48).

Учитывая это обстоятельство, можно заключить, что низкочастотные длинноволновые неустойчивости плазмы с неоднородной температурой, рассмотренные в п. 1а § 6.2, должны иметь место не только при $\beta \rightarrow 0$, но и при конечных, вплоть до $\beta \approx 1$. Последующее рассмотрение неустойчивостей бесстолкновительной плазмы конечного давления, проводимое в приложении 1 к гл. 15, подтверждает, что это, действительно, так и есть. Это относится также и к столкновительной плазме, см. гл. 16.

Заметим также, что в п. 1а § 6.2 были рассмотрены только те длинноволновые неустойчивости, которые нарастают при наличии градиента ионной температуры, $\nabla T_i \neq 0$. Эти неустойчивости обнаруживаются при учете продольного движения ионов. Покажем, кроме того, что длинноволновые возмущения, $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$, могут раскачиваться и вследствие градиента температуры электронов, $\nabla T_e \neq 0$. В связи с этим рассмотрим дисперсионное уравнение (13.48) [или, что то же самое, дисперсионное уравнение для потенциальных возмущений $\epsilon_0 = 0$ в пределе $(k_{\perp} \rho_i)^2 \rightarrow 0$] при $\omega/k_z \ll v_{Te}$ и в пренебрежении продольным движением ионов, $k_z v_{Ti}/\omega \rightarrow 0$. При этом (13.48) сводится к виду

$$1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + \frac{i\sqrt{\pi}\omega}{|k_z|v_{Te}} \left[1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} \left(1 - \frac{\eta_e}{2} \right) \right] = 0. \quad (14.61)$$

Отсюда следует

$$\omega = \omega_{ne} - \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{ne}^2}{|k_z|v_{Te}} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_0}. \quad (14.62)$$

Видно, что $\gamma > 0$, если

$$\partial \ln T_e / \partial \ln n_0 < 0. \quad (14.63)$$

Таким образом, оказывается, что плазма с неоднородной температурой электронов неустойчива относительно рассмотренных возмущений, если градиенты температуры и плотности направлены в противоположные стороны.

Отметим также, что рассмотренная в § 14.2 раскачка альфвеновских волн резонансными электронами име-

ет место не только при $\nabla T = 0$, но и в некотором интервале $\eta = \partial \ln T / \partial \ln n_0$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (13.48) при малых, но ненулевых $(k_{\perp} \rho_i)^2$. При этом получается

$$\omega^2 + \omega\omega_{ne}(1 + \eta) - c_A^2 k_z^2 = -i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z|v_{Te}} c_A^2 k_z^2 (k_{\perp} \rho_i)^2 \times \\ \times \frac{[1 + \omega_{ne}(1 + \eta)/\omega][1 - \omega_{ne}(1 - \eta/2)/\omega]}{(1 - \omega_{ne}/\omega)^2}. \quad (14.64)$$

Отсюда находим, что имеет место неустойчивость, если

$$-4 < \eta < 2. \quad (14.65)$$

2. Коротковолновые неустойчивости. В потенциальном приближении коротковолновые неустойчивости, $z_i \geq 1$, плазмы с неоднородной температурой исследовались в п. 1б § 6.2 (возмущения с $\omega \approx k_z v_{Ti}$, раскачиваемые ионами) и в п. 2 § 6.2 (возмущения с $\omega \approx k_z v_{Te}$, раскачиваемые электронами). Как и при $z_i \ll 1$, возмущения с $\omega \approx k_z v_{Ti}$ слабо чувствительны к эффектам непотенциальности, если $\beta \ll \ll 1$. Что касается возмущений с $\omega \approx k_z v_{Te}$, то они становятся существенно непотенциальными при $k \leq \leq \omega_{pe}/c$, что при другой форме записи означает

$$(k_{\perp} \rho_i)^2 \leq (m_i/m_e) \beta. \quad (14.66)$$

Поэтому в электронных неустойчивостях с $z_i \geq 1$ учет непотенциальности необходим уже при

$$\beta \geq m_e/m_i. \quad (14.67)$$

Анализ непотенциальных электронных неустойчивостей показывает, что при $\beta \geq m_e/m_i$ неустойчивости, обсуждавшиеся в п. 2 § 6.2, имеют границу, представленную на рис. 14.5.

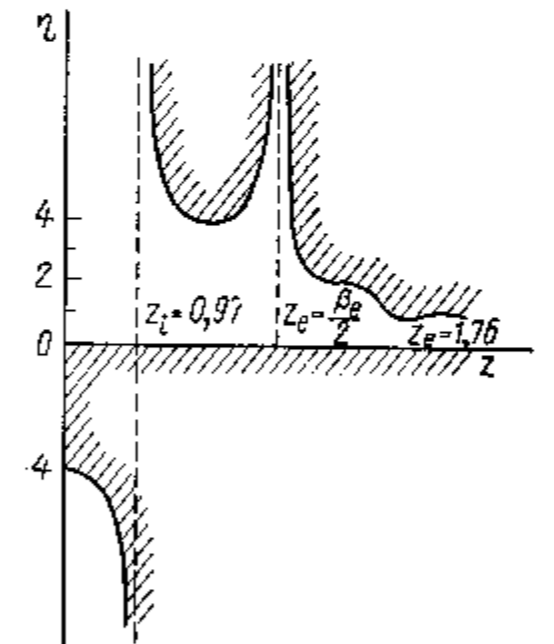


Рис. 14.5. Зависимость $\eta = \partial \ln T / \partial \ln n_0$ от $z = (k_{\perp} \rho_i)^2$ на границе области неустойчивости. Область неустойчивости заштрихована

§ 14.9. Альфвеновская неустойчивость струи плазмы с неоднородным профилем скорости

Пусть плазма движется вдоль магнитного поля со скоростью V_0 , зависящей от координаты x . Рассмотрим альфвеновские волны в такой плазме. Из (13.46) и (13.45) находим, что частота этих волн должна удовлетворять дисперсионному уравнению

$$\omega'^2 - \omega' \omega_{pi}^* - k_z^2 c_A^2 - (k_y k_z T_i / m_i \omega_{Bi}) dV_0/dx = 0, \quad (14.68)$$

где $\omega' = \omega - k_z V_0$. Заключаем, что при $\nabla p = 0$ струя плазмы неустойчива относительно возмущений с

$$k_z/k_\perp < (\beta_i/2) \omega_{Bi}^{-1} dV_0/dx. \quad (14.69)$$

При выполнении этого условия инкремент нарастания возмущений порядка

$$\gamma \approx \sqrt{\beta} k_y \rho_i dV_0/dx. \quad (14.70)$$

При $\nabla p \neq 0$ имеет место стабилизация возмущений. Качественно критерий стабилизации имеет вид

$$\partial \ln p / \partial \ln V_0 > V_0/c_A. \quad (14.71)$$

§ 14.10. Стабилизация торцами желобковой неустойчивости в плотной плазме

В § 9.4 мы рассмотрели косые волны при $g \neq 0$ в условиях, когда непотенциальность возмущений не важна. В противоположном предельном случае существенно непотенциальных возмущений анализ можно провести сравнительно просто, если учесть, что желобковая неустойчивость связана с раскачкой альфвеновских возмущений. Такие возмущения при $g=0$ и $k_z \neq 0$ обсуждались в § 14.2, 14.3, а при $k_z=0$, $g \neq 0$ в § 9.2. Комбинируя результаты этих параграфов, можно прийти к следующему локальному дисперсионному уравнению для случая $k_z \neq 0$, $g \neq 0$:

$$\omega(\omega - \omega_{pi}) - k_z^2 c_A^2 - g k_y k_z / k_\perp^2 = 0. \quad (14.72)$$

При нулевом ларморовском радиусе ионов $|gk| \gg \gg \omega_{pi}$ отсюда вытекает критерий стабилизации косых волн:

$$k_z^2 c_A^2 > |gk|. \quad (14.73)$$

Для плазмы, граничащей с проводящими торцами, это означает [ср. с. (9.55)]:

$$L/a < \pi (R/\beta a)^{1/2}. \quad (14.74)$$

Уравнение (14.72) описывает мелкомасштабные возмущения $k_\perp a \gg 1$, а условие (14.74) получено экстраполяцией вытекающих из (14.72) результатов на область волновых чисел $k_\perp a \approx 1$. Более корректное рассмотрение крупномасштабных возмущений можно провести в приближении $V |gk| > \omega_{pi}$ энергетическим методом, изложенным в п. 3 § 9.1. Остановимся на этом подробнее.

В качестве исходной системы уравнений используем уравнения типа (9.10), но с добавлением в правую часть второго уравнения (9.10) члена с магнитной силой:

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho' / \partial t + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{V}') &= 0; \\ \rho_0 \partial \mathbf{V}' / \partial t &= \rho' \mathbf{g} + [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{V}'] / 4\pi. \end{aligned} \right\} \quad (14.75)$$

Штрих здесь означает часть, линейную по возмущениям. Используя (9.9), (9.11) и уравнение $\partial \mathbf{V}' / \partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$, выражением \mathbf{V}' через ξ :

$$\mathbf{V}' = \operatorname{rot} [\xi, \mathbf{B}_0]. \quad (14.76)$$

Тогда из (14.75) получается уравнение типа (9.13), но с другим значением оператора \hat{K} :

$$\hat{K} \xi = g \operatorname{div}(\rho_0 \xi) + k_z^2 B_0^2 \xi / 4\pi. \quad (14.77)$$

Потенциальная энергия (9.15) в этом случае равна

$$W = (1/2) \int [(\xi g) (\xi \nabla \rho_0) + k_z^2 \xi^2 B_0^2 / 4\pi] dr. \quad (14.78)$$

Она не отрицательна ни при каких ξ , если при всех r удовлетворяется условие (14.73). Это означает, что стабилизирующий эффект проводящих торцов, описываемый условием (14.74), имеет место для всех возмущений (и в том числе для возмущений первой моды, $l=1$).

§ 14.11. Непотенциальная ионно-циклотронная неустойчивость

Рассмотрим возмущения максвелловской плазмы с $k_z=0$ и $\mathbf{E} \parallel \mathbf{V}_0$. Согласно уравнениям (13.41) и (13.43), такие возмущения описываются дисперсионным уравнением

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega} - \zeta \frac{\omega_{pe}}{\omega} - \zeta \frac{m_e}{m_i} \frac{I_n(z_i) \exp(-z_i)}{\omega - n\omega_{Bi}} \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) &= 0; \\ \zeta &\equiv (1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2)^{-1}; \quad \nabla T = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.79)$$

Если частота ω_{pe} сравнивается с ионно-циклотронной частотой, то решения этого уравнения комплексны. Условие раскачки возмущений имеет вид

$$kr_e > m_e/m_i \sqrt{\beta_e}, \quad (14.80)$$

а максимальный инкремент нарастающих колебаний порядка

$$\gamma_{\max} \approx (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{Bi}. \quad (14.81)$$

Раскачка подобного рода колебаний может происходить в сильнонеоднородных переходных слоях с достаточно горячими электронами.

Библиографический обзор к гл. 14

1. Михайловский А. Б., Рудаков Л. И. К вопросу об устойчивости пространственно-неоднородной плазмы в магнитном поле.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 912.
2. Михайловский А. Б. Колебания неоднородной плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 141.
В работах [1, 2] исследовались непотенциальные низкочастотные неустойчивости плазмы с $\beta > m_e/m_i$, § 14.2, 14.8, а также непотенциальные неустойчивости плазмы с $\beta < m_e/m_i$.
3. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. О дрейфовой неустойчивости в плотной плазме.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 45, с. 1566.
Найдена граница неустойчивости бесстолкновительной плазмы с $\nabla n_0=0$, $\nabla T=0$ со стороны больших β , § 14.3.
4. Mikhailovsky A. B. Drift wave stability under linear theta-pinch conditions.— «Nucl. Fusion», 1972, v. 12, p. 55.
Исследовалась инерционно-диссипативная неустойчивость плаз-

мы с ненулевым β , § 14.4—14.7. Показано, что эта неустойчивость подавляется при увеличении параметра β , § 14.7.

5. Михайловский А. Б. Электронная температурная неустойчивость неоднородной плазмы.— «Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1365.
Исследовались коротковолновые непотенциальные неустойчивости плазмы с неоднородной температурой, § 14.8.
6. Dobrovolny M. Kelvin—Helmholtz instability in a high- β collisionless plasma.— «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 2263.
Рассмотрена раскачка альфвеновских волн в струе плазмы с неоднородным профилем скорости, § 14.9.
7. Велихов Е. П. Устойчивость границы плазма—вакуум.— «Журн. техн. физ.», 1961, т. 31, с. 180.
8. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, с. 132.
В работах [7, 8] исследовалось влияние проводящих торцов на желобковую неустойчивость плотной плазмы, § 14.10.
9. Михайловский А. Б. Поперечные дрейфовые колебания неоднородной плазмы.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 1552.
Рассмотрена градиентная раскачка ионно-циклотронных колебаний типа обыкновенной волны, § 14.11.

Глава 15

НЕУСТОЙЧИВОСТИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ

§ 15.1. Введение

Используя уравнения колебаний бесстолкновительной плазмы конечного давления, полученные в гл. 13, рассмотрим неустойчивости такой плазмы. Вначале остановимся на возмущениях с $\omega \ll \omega_{Bi}$, $k_{\perp} r_i \ll 1$. Согласно § 13.9, общее дисперсионное уравнение в этом случае распадается на два, одно из которых соответствует волнам магнитно-звукового типа, а другое — волнам альфвеновского типа. Возмущения магнитно-звукового типа с $k_z=0$, называемые также волнами Церковникова, исследуются в § 15.2 (возмущения магнитно-звукового типа с $k_z \neq 0$ анализируются в приложении 1 к настоящей главе). Возмущения альфвеновского типа исследуются в § 15.3.

В отличие от § 15.2, 15.3, в § 15.4—15.6 рассматриваются коротковолновые возмущения, $k_{\perp} r_i \gg 1$. В § 15.4

частота этих возмущений полагается малой по сравнению с ионной-циклотронной, $\omega \ll \omega_{Bi}$. В § 15.5 исследуется роль ионно-циклотронных резонансов в максвелловской плазме, а в § 15.6 — в плазме с немаксвелловским распределением ионов по поперечным скоростям.

В § 15.7 выясняется роль конечного значения параметра β в раскачке альфвеновских волн в плазме, движущейся вдоль магнитного поля с неоднородным профилем скорости.

§ 15.2. Волны Церковникова

Рассмотрим возмущения бесстолкновительной неоднородной максвелловской плазмы конечного давления с частотами, малыми по сравнению с ионно-циклотронной ($\omega \ll \omega_{Bi}$), поперечной длиной волны, большой по сравнению с ларморовским радиусом ионов ($k_{\perp} \rho_i \ll 1$), распространяющиеся поперек магнитного поля, $k_z = 0$, и поляризованные так, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. Согласно § 13.9, такие возмущения описываются дисперсионным уравнением (13.60), т. е.

$$\epsilon_{22}^{(0,0)} - N^2 = 0, \quad (15.1)$$

где $N^2 = c^2 k^2 / \omega^2$;

$$\epsilon_{22}^{(0,0)} = - \sum_{i,e} \frac{k_x^2}{k_y^2} \frac{1}{\kappa_B^2 d^2 \omega} \hat{I} \langle \omega_m^2 \zeta_0 \rangle; \quad (15.2)$$

остальные обозначения даны в § 13.9.

Вычисляя результат действия оператора \hat{I} в (15.2) и вводя безразмерную частоту $s = \omega / \Omega_i$, приводим уравнение (15.1) к виду

$$F(s) \equiv -2 + (s + \Gamma)\Phi(s) + (-s + \Gamma)\Phi(-s) = 0, \quad (15.3)$$

где

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{s+x}; \quad \Gamma \equiv \frac{\eta - 1}{\eta(1 + \beta/2) + \beta/2}. \quad (15.4)$$

Анализ уравнения (15.3) проведем методом Найквиста (см. § 2.7 т.1), следуя работе Ю. А. Церковникова,

Для определенности полагаем $\Omega_i > 0$. При этом, в соответствии с уравнением (2.81) т. 1, число решений (15.3) с $\gamma > 0$ равно

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d \ln F}{ds} ds, \quad (15.5)$$

где C — контур, изображенный на рис. 2.2 т.1. При $|s| \gg 1$

$$F(s) \approx \frac{2(2 - \Gamma)}{s^2} + \frac{12(4 - \Gamma)}{s^4} + \dots \quad (15.6)$$

Поэтому интеграл по полуокружности равен $-2\pi i$. Поскольку $F(s) = F(-s)$, то интеграл по вещественной оси равен умноженному на $2i$ приращению аргумента $F(s)$ при изменении s от 0 до $+\infty$. С учетом этого (15.5) запишется в виде

$$N = -1 + [\arg F(\infty) - \arg F(0)]/\pi. \quad (15.7)$$

При вещественных s

$$\text{Im} F(s) = -\pi \exp(-|s|) (|s| - \Gamma) \text{sgn} s. \quad (15.8)$$

Если $\Gamma > 0$, то $\text{Im} F(s) = 0$ в точках $s = \pm \Gamma$. При этом, как следует из (15.3), $\text{Re} F(\pm \Gamma) < 0$. Для $|s| \ll 1$

$$F(s) \approx -2\Gamma \ln s - 2(1 + C\Gamma) + i\pi\Gamma, \quad (15.9)$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера.

С помощью (15.6), (15.8), (15.9) находим приращение $\arg F(s)$ при движении s вдоль вещественной оси. Если

$$0 < \Gamma < 2, \quad (15.10)$$

то $F(s)$ изменяется так, как показано на рис. 15.1. В этом случае $\arg F(\infty) - \arg F(0) = -2\pi$, так что $N = 1$. Это означает, что при выполнении условия (15.10) плазма неустойчива. При всех других Γ $N = 0$, т. е. плазма устойчива.

При всех β условие неустойчивости (15.10) сводится к следующему:

$$|\eta| > 1. \quad (15.11)$$

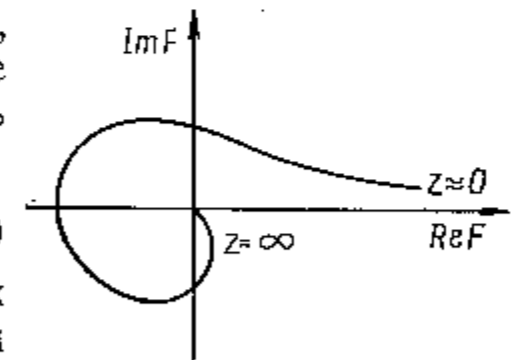


Рис. 15.1. Характер зависимости функции $F(s)$ в случае неустойчивости

Таким образом, относительно рассмотренных возмущений плазма неустойчива, если ее температура изменяется в пространстве более круто, чем плотность.

Значение инкремента вблизи границы неустойчивости можно найти приравниванием нулю выражения (15.6), если $\Gamma \approx 2$, либо выражения (15.9), если $\Gamma \approx 0$. Таким путем находим, что при $\beta \ll 1$

$$\gamma = |\Omega_i| \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\eta-1} - C\right), & \eta \approx 1; \\ \sqrt{-12/(1+\eta)}, & \eta \approx -1. \end{cases} \quad (15.12)$$

Видно, что при удалении η от границы неустойчивости инкремент становится порядка частоты магнитного дрейфа:

$$\gamma \approx |\Omega_i|. \quad (15.13)$$

Качественно этот результат остается в силе вплоть до $\beta \approx 1$.

§ 15.3. Альфвеновские волны в неоднородной плазме конечного давления

В § 14.2 рассматривались альфвеновские волны в плазме низкого давления, $\beta \ll 1$. Было показано, что в приближении нулевого ларморовского радиуса ионов [т. е. в пренебрежении членами, малыми как $(k_{\perp} \rho_i)^2$] дисперсионное уравнение для альфвеновских волн сводится к виду

$$\omega^2 - \omega \omega_{pi}^* - k_z^2 c_A^2 = 0, \quad (15.14)$$

где $\omega_{pi}^* = k_y \kappa_{pi} T_i / m_i \omega_{Bi}$; $\kappa_{pi} = \partial \ln p_i / \partial x$. В этом приближении частота колебаний вещественна при всех $\eta \equiv \partial \ln T / \partial \ln n_0$ и определяется соотношением

$$\omega = \frac{\omega_{pi}^*}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_{pi}^*}{2}\right)^2 + k_z^2 c_A^2}. \quad (15.15)$$

При рассмотрении альфвеновских волн в плазме конечного давления будем исходить из соотношений, приведенных в § 13.9. Согласно § 13.9, в случае плазмы конечного давления, как и в случае плазмы низкого давле-

ния, общее дисперсионное уравнение низкочастотных ($\omega \ll \omega_{Bi}$) длинноволновых ($k_{\perp} \rho_i \ll 1$) колебаний расщепляется на два. Одно из них соответствует волнам магнитно-звукового типа, при $k_z = 0$, рассмотренным в § 15.2 (волны Церковникова). Второе же, а именно уравнение (13.54), описывает волны альфвеновского типа и сводится к следующему:

$$\omega^2 - \omega_{pi}^* (\omega_{pi}^* + \Omega_i) - \sigma \omega_{pi}^* \Omega_i - k_z^2 c_A^2 = 0, \quad (15.16)$$

где, как и в § 13.9, $\Omega_i = \kappa_B k_y T_i / m_i \omega_{Bi}$; $\kappa_B = \partial \ln B_0 / \partial x$; $\sigma = (1 + 2\eta) / (1 + \eta)$.

В отличие от (15.14), это уравнение может иметь комплексные корни, соответствующие неустойчивости. Неустойчивость имеет место, если k_z достаточно мало, при условии

$$-1 < \eta < [1 + 2\beta(1 + \beta/2)^{-2}]^{-1}. \quad (15.17)$$

Как при малых, так и при больших β это соответствует узкому интервалу η вблизи $\eta = -1$. Максимальной ширины этот интервал достигает при $\beta = 2$:

$$-1 < \eta_{\beta=2} < -1/2. \quad (15.18)$$

Если параметр η не удовлетворяет условиям (15.17), то, как и в случае плазмы низкого давления, для нахождения мнимой части частоты альфвеновских волн необходимо учитывать в дисперсионном уравнении члены, малые как $(k_{\perp} \rho_i)^2$. Дисперсионное уравнение для альфвеновских волн в максвелловской плазме с учетом членов порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2$ приведено в § 13.9, а его анализ был произведен в ряде работ, отмеченных в библиографическом обзоре к настоящей главе. Сведения о неустойчивостях максвелловской плазмы конечного давления, связанных с раскачкой альфвеновских волн и обладающих инкрементом $\gamma \approx \text{Re} \omega (k_{\perp} \rho_i)^2$, можно найти, обратившись к этим работам.

§ 15.4. Коротковолновые низкочастотные возмущения максвелловской плазмы конечного давления

В отличие от § 15.2—15.4, здесь примем $k_{\perp} \rho_i \gg 1$, т. е. рассмотрим возмущения с длинами волн, малыми по сравнению с ларморовским радиусом ионов.

Частоты возмущений считаем малыми по сравнению с ионной циклотронной ($\omega \ll \omega_{Bi}$). Ограничимся анализом случая волн с $k_z=0$, поляризованных так, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$.

Учитывая (13.16), (13.38), находим, что интересующие нас возмущения описываются дисперсионным уравнением

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{02} \\ \epsilon_{20} & \epsilon_{22} - N^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (15.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{00} &= (kd)^2 (2 - \omega \hat{l}_e \langle \zeta_e J_0^2 \rangle); \\ \epsilon_{02} &= -\epsilon_{20} = i(k\kappa_B d^2)^{-1} \hat{l}_e [\Omega_e \langle \zeta_e \epsilon_{\perp} 2J_0 J_1 / \xi \rangle]; \\ \epsilon_{22} &= -\frac{1}{\kappa_B^2 d^2} \hat{l}_e \left[\frac{\Omega_e^2}{\omega} \left\langle \zeta_e \epsilon_{\perp}^2 \frac{4J_1^2}{\xi^2} \right\rangle \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

Здесь предположено $T_e = T_i = T$. Обозначения: $d^2 = T/4\pi e^2 n_e$ — квадрат радиуса Дебая; $\zeta_e = (\omega - \epsilon_{\perp} \Omega_e)^{-1}$; $\epsilon_{\perp} = m_e v_{\perp}^2 / 2T$; $\Omega_e = k_y \kappa_B T / m_e \omega_{Be}$. Символ $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по скоростям, $\langle \dots \rangle = \int_0^{\infty} (\dots) e^{-\epsilon_{\perp}} d\epsilon_{\perp}$; J_0, J_1 — функции Бесселя от аргумента $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Be}$, так что в (15.20) учитывается конечный ларморовский радиус электронов. Оператор \hat{l}_e — это оператор \hat{l} , определенный соотношением (4.102), в котором восстановлены электронные индексы у массы и циклотронной частоты.

1. **Приближение $k_{\perp} \rho_e \rightarrow 0$.** Сначала рассмотрим возмущения с $k_{\perp} \rho_e \ll 1$, пренебрегая малыми членами порядка $(k_{\perp} \rho_e)^2$. В этом приближении из уравнений (15.20) следует:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{00} &= (kd)^{-2} (1 - \omega_{ni}/\omega) - (\kappa_B/k) I^{(e)}; \\ \epsilon_{02} &= -\epsilon_{20} = iI^{(e)}; \\ \epsilon_{22} - N^2 &= -(\kappa_B d)^{-2} (\Omega_i/\omega) (1 - \omega_{pi}^*/\omega) - (k/\kappa_B) I^{(e)}; \\ I^{(e)} &= (k\kappa_B d^2)^{-1} \hat{l}_e [\Omega_e \langle \epsilon_{\perp} \zeta_e \rangle]; \quad k \equiv k_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Подставляя (15.21) в (15.19), находим явный вид дисперсионного уравнения:

$$\left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega}\right) \hat{l}_i \left(\frac{\Omega_i}{\omega}\right) + \hat{l}_e [\Omega_e \langle \epsilon_{\perp} \zeta_e \rangle] \hat{l}_i \left(1 - \frac{\Omega_i}{\omega}\right) = 0, \quad (15.22)$$

где \hat{l}_i — оператор \hat{l} с ионными индексами.

В отсутствие градиента температуры ($\nabla T = 0$) имеем $\hat{l}_i = 1 - \omega_{ni}/\omega$. Поэтому из (15.22) следует, что при $\nabla T = 0$ и произвольных значениях β в плазме существует ветвь колебаний с частотой

$$\omega = \omega_{ni}. \quad (15.23)$$

Возмущения, описываемые дисперсионным уравнением (15.23), можно рассматривать как возмущения ветви (5.8), существующей при $\beta = 0$. Видно, что длинноволновая часть спектра (5.8) с увеличением параметра β остается неизменной.

Покажем, что при $\nabla T \neq 0$ и конечных β частота возмущений типа (15.23) становится комплексной и что $\text{Im} \omega < 0$, т.е. колебания затухают. В этом убеждаемся, анализируя уравнение (15.22) при $\eta \equiv \kappa_T / \kappa_n \ll 1$. В приближении $\eta \ll 1$ из (15.22) вместо (15.23) следует

$$\omega = \omega_{ni} \left[1 + \eta \frac{\beta/2}{1 + \beta/2} - \frac{\eta^2}{4} \frac{\beta}{(1 + \beta/2)^2} \langle \zeta_e \epsilon_{\perp} \rangle \right]. \quad (15.24)$$

Поскольку $\text{Im} \langle \zeta_e \epsilon_{\perp} \rangle = -\pi \langle \epsilon_{\perp} \delta(\omega - \epsilon_{\perp} \Omega_e) \rangle < 0$, то из (15.24) находим, что $\text{Im} \omega < 0$, что соответствует затуханию колебаний.

Затухание колебаний при $\nabla T \neq 0$ обусловлено их взаимодействием с резонансными электронами.

2. **Затухание колебаний в плазме с $\nabla T = 0$ при конечных $k_{\perp} \rho_e$.** Как отмечалось выше, при $\eta = 0$ и $k_{\perp} \rho_e \rightarrow 0$ в плазме существует ветвь возмущений (15.23) с нулевым инкрементом. Фазовая скорость этих возмущений, $\bar{\omega}/k_y$, имеет то же направление, что и магнитный дрейф электронов. Поэтому если учесть малые члены порядка $(k_{\perp} \rho_e)^2$, то, как и при $\eta \neq 0$, мы должны получить некоторую мнимую добавку к частоте, обусловленную взаимодействием возмущений с резонансными электронами.

Поскольку оператор \hat{l}_e при $\eta = 0$ равен $1 - \omega_{ne}/\omega$, то в случае $\omega \approx \omega_{ni} = -\omega_{ne}$ знак \hat{l}_e должен быть положитель-

ным. Следовательно, как и в случае однородной плазмы, резонансные электроны должны отбирать энергию у колебаний ($\omega \text{Im} \varepsilon_{22}^{(e)} > 0$), и колебания должны затухать, $\text{Im} \omega < 0$.

Убедимся в этом непосредственно вычислением декремента колебаний.

Преобразуем уравнение (15.19), прибавляя к первой строке определителя вторую строку, умноженную на $i\kappa_B/k$, после чего прибавим к первому столбцу второй, умноженный на $(-i\kappa_B/k)$ (ср. с аналогичной процедурой в § 13.9). В результате дисперсионное уравнение (15.19) примет вид

$$\begin{vmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon_{22} - N^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (15.25)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &\equiv \varepsilon_{00} - 2i(\kappa_B/k)\varepsilon_{02} + (\kappa_B/k)^2(\varepsilon_{22} - N^2) = \\ &= (kd)^{-2} \{ \hat{l}_i (1 - \Omega_i/\omega) + \hat{l}_e [1 - I_0(z_e) \exp(-z_e) - \\ &\quad - (\Omega_e/\omega)(1 - 2I_1(z_e) \exp(-z_e/z_e) - \\ &\quad - \Omega_e \langle \varepsilon_{\perp} \zeta_e (J_0 - 2J_1/\xi)^2 \rangle] \}; \\ \varepsilon'_{12} &\equiv \varepsilon_{02} + i(\kappa_B/k)(\varepsilon_{22} - N^2) = i(k\kappa_B d^2)^{-1} \{ \hat{l}_e [\Omega_e \langle \varepsilon_{\perp} \zeta \times \\ &\quad \times (2J_1/\xi)(J_0 - 2J_1/\xi) \rangle - (\Omega_e/\omega)(1 - 2I_1(z_e) \exp(-z_e/z_e) - \\ &\quad - \hat{l}_i(\Omega_i/\omega)) \}; \quad z_e \equiv (k\rho_e)^2. \end{aligned} \quad (15.26)$$

Рассмотрим уравнение (15.25) при $\eta=0$. В приближении $k\rho_e \rightarrow 0$ элементы ε'_{12} пропорциональны разности $1 - \omega_{ni}/\omega$, так что в этом приближении уравнение (15.25) сводится к следующему:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} \equiv (kd)^{-2} (1 - \omega_{ni}/\omega) (1 - \Omega_i/\omega) = 0. \quad (15.27)$$

Отсюда получаем решение (15.23), $\omega = \omega_{ni}$.

При учете членов порядка $(k\rho_e)^2$ разность $1 - \omega_{ni}/\omega$ должна быть тоже порядка $(k\rho_e)^2$, так что $\varepsilon'_{12} \sim (k\rho_e)^2$. В этом приближении из (15.25) следует

$$\varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)} = 0, \quad (15.28)$$

где в соответствии с (15.26)

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = z_e (kd)^{-2} (1 - \omega_{ni}/\omega) (1 - \Omega_e/\omega). \quad (15.29)$$

Из (15.28) находим частоту колебаний

$$\omega = \omega_{ni} [1 - 2z_e (1 - \beta/2) (1 + \beta/2)^{-1}]. \quad (15.30)$$

Видно, что добавка к частоте колебаний порядка z_e является вещественной. Поэтому для нахождения инкремента или декремента колебаний необходимо учесть члены порядка $(k\rho_e)^4$.

Исходя из уравнения (15.25), находим общее выражение для инкремента:

$$\gamma = - \frac{1}{\partial \varepsilon_{11}^{(0)}/\partial \omega} \text{Im} \left[\varepsilon_{11}^{(2)} + \frac{(\varepsilon'_{12})^2}{\varepsilon_{22} - N^2} \right], \quad (15.31)$$

где с требуемой точностью

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_{12} &= -i(k\kappa_B d^2)^{-1} \{ \hat{l}_i (\Omega_i/\omega) + \hat{l}_e [z_e (\Omega_e/\omega) (1 + \omega \langle \varepsilon_{\perp}^2 \zeta_e/4 \rangle)] \}; \\ \varepsilon_{22} - N^2 &= -(\kappa_B k)^{-2} \hat{l}_e [\Omega_e \langle \varepsilon_{\perp} \zeta \rangle]; \\ \text{Im} \varepsilon_{11}^{(2)} &= -(kd)^{-2} \text{Im} \hat{l}_e [\Omega_e (z_e/4)^2 \langle \varepsilon_{\perp}^3 \zeta_e \rangle] = \\ &= (z_e \omega \kappa_B / 4 \Omega_e k)^2 \text{Im} (\varepsilon_{22} - N^2). \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

Из уравнения (15.31) следует

$$\gamma = - \frac{1}{\partial \varepsilon_{11}^{(0)}/\partial \omega} \frac{(\varepsilon'_{12}/i)^2}{|\varepsilon_{22} - N^2|^2} \text{Im} \varepsilon_{22}, \quad (15.33)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}'_{12} &\equiv \varepsilon'_{12} - (iz_e \omega \kappa_B / 4 \Omega_e k) (\varepsilon_{22} - N^2) = \\ &= - (i/k\kappa_B d^2) \hat{l}_e [z_e (\Omega_e/\omega) (1 - \omega/4\Omega_e)]. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Поскольку $\omega \text{Im} \varepsilon_{22}$, то $\gamma < 0$, т. е. колебания затухают. При $\beta \approx 1$ из (15.33) получаем оценку для декремента

$$\gamma \approx - |\text{Re} \omega| z_e^2. \quad (15.35)$$

Если $\beta \ll 1$, то декремент экспоненциально мал. При $z_e \approx 1$ он порядка

$$\gamma \approx - \exp(-\omega/\Omega_e) (\text{Re} \omega)^2 / |\Omega_e|. \quad (15.36)$$

В случае $z_e \ll 1$ в правой части равенства (15.36) должен стоять также сомножитель z_e^2 , т. е.

$$\gamma \approx -z_e^2 \exp(-\omega/\Omega_e) (\operatorname{Re} \omega)^2 / |\Omega_e|. \quad (15.37)$$

Таким образом, мы показали, что при $\eta = 0$ коротковолновые возмущения ($k_{\perp} \rho_i \gg 1$, $k_{\perp} \rho_e \ll 1$) с $k_z = 0$ в плазме с конечным β затухают. При $z_e \ll 1$ декремент затухания порядка z_e^2 . Экстраполяция этого результата на область $z_e \approx 1$ приводит к выводу, что при $z_e \approx 1$ декремент затухания порядка частоты, $|\gamma| \approx \operatorname{Re} \omega$, если $\beta \approx 1$, и мал по сравнению с частотой $\gamma/\omega \sim \exp(-2/\beta)$, если $\beta \ll 1$.

§ 15.5. Градиентно-циклотронная неустойчивость плазмы конечного давления

В § 5.1 было показано, что при конечном отношении ларморовского радиуса ионов к поперечному размеру плазмы возможно нарастание возмущений с частотами, лежащими вблизи ионно-циклотронной частоты и ее гармоник (градиентно-циклотронная неустойчивость). Результаты § 5.1 относились к плазме с $\beta = 0$. Теперь рассмотрим возможность развития градиентно-циклотронной неустойчивости при конечных β .

В соответствии с § 5.1 градиентно-циклотронная неустойчивость связана с ветвями коротковолновых колебаний плазмы, $k_{\perp} \rho_i \gg 1$, обладающих очень малым или нулевым продольным волновым числом, $k_z \rightarrow 0$, и электрическим полем $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. В общем случае такие возмущения описываются дисперсионным уравнением вида (15.19). В § 15.4 мы исследовали возмущения, описываемые этим дисперсионным уравнением, предполагая их низкочастотными ($\omega \ll \omega_{Bi}$); в этом случае элементы ϵ_{ik} , входящие в (15.19), определяются формулами (15.20). Чтобы сделать уравнения вида (15.19), (15.20) пригодными для изучения ионно-циклотронных эффектов, необходимо в правые части уравнений (15.20) добавить члены, соответствующие этим эффектам. Используя общие выражения для ϵ_{ik} вида (13.19), находим, что необходимые нам выражения для ϵ_{00} , ϵ_{02} , ϵ_{20} , ϵ_{22} помимо членов, стоящих в правых

частях равенств (15.20), содержат также следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} \delta \epsilon_{00} &= -(kd)^{-2} \hat{l}_i \langle \omega \zeta_n^{(i)} J_n^2 \rangle; \\ \delta \epsilon_{02} &= -\delta \epsilon_{20} = -i (k \kappa_B a^2)^{-1} \hat{l}_i \langle \Omega_i \zeta_n^{(i)} \epsilon_{\perp} (2J_n J_n' / \xi_i) \rangle; \\ \delta \epsilon_{22} &= -(\kappa_B d)^{-2} \hat{l}_i \langle [(\Omega_i^2 / \omega) \zeta_n^{(i)} (2J_n' / \xi_i)^2] \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (15.38)$$

Здесь $\zeta_n^{(i)} = (\omega - n\omega_{Bi} - \Omega_i \epsilon_{\perp})^{-1}$, функции Бесселя содержат аргумент $\xi_i = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Bi}$, $\epsilon_{\perp} = m_i v_{\perp}^2 / 2T$, а Ω_i и \hat{l}_i отличаются от Ω_e и \hat{l}_e заменой электронных индексов ионными.

Из § 5.1 следует, что хотя циклотронные эффекты могут существенно модифицировать колебания и приводить к неустойчивости, они изменяют частоту колебаний лишь на малую комплексную величину. Поэтому их следует учитывать прежде всего тогда, когда в пренебрежении ими частота колебаний вещественна, т. е. в соответствии со сказанным в § 15.4 при $\nabla T = 0$. В связи с этим ниже при исследовании градиентно-циклотронной неустойчивости ограничимся рассмотрением только случая плазмы $\nabla T = 0$.

При $\beta \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение (15.19) с ϵ_{ik} , равными сумме правых частей (15.20) и (15.38), сводится к следующему:

$$k^2 d^2 \epsilon_{00} = 2 - \hat{l}_e [I_0(z_e) \exp(-z_e)] - [(\omega / (\omega - n\omega_{Bi})) \hat{l}_i (2\pi z_i)^{-1/2}]. \quad (15.39)$$

Отсюда вытекают результаты, изложенные в § 5.1, и, в частности, то обстоятельство, что при

$$\rho_i / a > 2 (m_e / m_i)^{1/2} \quad (15.40)$$

имеет место неустойчивость с частотой

$$\operatorname{Re} \omega \approx n\omega_{Bi} \approx \omega_{pi} \quad (15.41)$$

и инкрементом

$$\gamma \approx (m_e / m_i)^{1/2} n\omega_{Bi}. \quad (15.42)$$

Из (15.19), (15.20), (15.38) следует, что в уравнении (15.39) пренебрежено членами порядка β , $\exp(-2/\beta)$, $\Omega_i / (\omega - n\omega_{Bi})$ и $\exp[-(\omega - n\omega_{Bi}) / \Omega_i]$. Если ω близко к $n\omega_{Bi}$, то члены с $\Omega_i / (\omega - n\omega_{Bi})$ и $\exp[-(\omega - n\omega_{Bi}) / \Omega_i]$ более важны, чем члены порядка β и $\exp(-2/\beta)$. Это

означает, что при исследовании циклотронных колебаний плазмы с конечным, но малым β необходимо прежде всего учесть магнитный дрейф ионов, и лишь при еще больших значениях β следует учитывать магнитный дрейф электронов и непотенциальность возмущений.

Таким образом, первый шаг в области конечных β должен состоять в следующем обобщении уравнения (15.39):

$$k^2 d^2 \epsilon_{00} \equiv 2 - \hat{I}_e I_0(z_e) \exp(-z_e) - \hat{I}_i \langle \omega J_n^2(\xi_i) / (\omega - n\omega_{Bi} - \Omega_i \epsilon_{\perp}) \rangle = 0. \quad (15.43)$$

Оценим, при каких значениях β уравнение (15.39) должно заменяться (15.43). Поскольку разность $\omega - n\omega_{Bi}$ при малых β порядка выражения в правой части (15.42), то отбрасывание членов $\Omega_i / (\omega - n\omega_{Bi})$ становится незаконным, если

$$\beta \geq \beta_{\text{мин}} \approx (m_e/m_i)^{1/2}. \quad (15.44)$$

1. Плазма с $\beta_{\text{мин}} < \beta \ll 1$. Полагаем, что неравенство (15.44) удовлетворяется, но что $\beta \ll 1$. При этих условиях возмущения описываются уравнением (15.43). При $\beta > \beta_{\text{мин}}$ наличие члена с магнитным дрейфом в уравнении (15.44) приводит к тому, что циклотронный вклад в уравнение (15.44) мал даже при малом $\omega - n\omega_{Bi}$ (в отличие от случая $\beta \rightarrow 0$, см. § 5.1). В результате этого неустойчивость «гидродинамического типа», рассмотренная в § 5.1 и приводящая к инкременту вида (15.42), при $\beta > \beta_{\text{мин}}$ перестает иметь место. Эффект раскачки колебаний тем не менее полностью не исчезает. Он становится при этом существенно кинетическим, т. е. инкремент нарастания колебаний теперь определяется не всеми ионами, а лишь теми, которые находятся в резонансе с волной (резонанс типа $\epsilon_{\perp} \Omega_i = \omega - n\omega_{Bi}$).

Учитывая только мнимую часть вклада циклотронного члена в (15.43), находим частоту колебаний и инкремент:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= \omega_{ni} I_0(z_e) \exp(-z_e) / [2 - I_0(z_e) \exp(-z_e)]; \\ \gamma &= \pi \frac{(\text{Re } \omega)^2 (1 - \omega_{ni}/\omega)}{I_0(z_e) \exp(-z_e)} \langle \delta(\text{Re } \omega - n\omega_{Bi} - \Omega_i \epsilon_{\perp}) J_n^2(\xi_i) \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (15.45)$$

Учитывая, что $\xi_i \gg 1$, и используя приближенную формулу $J_n^2(\xi_i) \approx (\pi \xi_i)^{-1}$, вычисляем среднее в (15.45) и приводим выражение для инкремента к виду

$$\gamma = \frac{(\text{Re } \omega)^2 (1 - \omega_{ni}/\text{Re } \omega) \exp[-(\text{Re } \omega - n\omega_{Bi})/\Omega_i]}{|\Omega_i| I_0(z_e) \exp(-z_e) [2z_e (\text{Re } \omega - n\omega_{Bi})/\Omega_i]^{1/2}}. \quad (15.46)$$

Согласно принятому нами предположению, $\gamma \leq \omega - n\omega_{Bi}$. Это приводит к ограничению снизу на разность $\omega - n\omega_{Bi}$, входящую в выражение (15.46). Поэтому оценку максимума инкремента можно получить, полагая $\gamma \approx \omega - n\omega_{Bi}$. В этом случае $\text{Re } \omega - n\omega_{Bi} \ll \Omega_i$, так что экспоненту в выражении (15.46) можно заменить единицей. При этом получается

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \frac{\text{Re } \omega}{z_e^{1/2}} \left(\frac{\text{Re } \omega}{\Omega_i} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\omega_{ni}}{\text{Re } \omega} \right)^{2/2}. \quad (15.47)$$

При $\rho_i/a \approx (m_e/m_i)^{1/2}$, когда могут нарастать только возмущения с $\omega \approx \omega_{Bi}$ ($n=1$), это означает

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{Bi} (m_e/m_i \beta)^{1/2}. \quad (15.48)$$

На пределе применимости неравенства (15.44), т. е. при $\beta \approx (m_e/m_i)^{1/2}$, формула (15.48) переходит в (15.42).

При $\rho_i/a \gg (m_e/m_i)^{1/2}$ из уравнения (15.47) следует, что в случае высших гармоник

$$\gamma_{\text{макс}} \approx n\omega_{Bi} (m_e/m_i \beta)^{1/2}, \quad (15.49)$$

тогда как в случае первых гармоник

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{Bi} (m_e a / \beta^{1/2} m_i \rho_i)^{2/2}. \quad (15.50)$$

Аналогично (15.48), выражения (15.49) и (15.50) при $\beta \approx \beta_{\text{мин}}$ плавно сшиваются с соответствующими результатами приближения $\beta \rightarrow 0$.

2. Плазма с $\beta \approx 1$. С ростом β становятся существенными непотенциальность колебаний и магнитный дрейф электронов. Эти эффекты учитываются дисперсионным уравнением (15.19) с элементами ϵ_{iR} , равными сумме правых частей (15.20) и (15.38). Переходим к анализу этого уравнения.

Из п. 1 следует, что эффективное значение аргумента ионных функций Бесселя $\xi_i \equiv k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Bi}$ велико по сравнению с единицей, $\xi_i \gg 1$ (хотя $\xi_i \ll z_e^{1/2}$, так как $\xi_i \approx z_e^{1/2} \epsilon_{\perp} \approx$

$\approx z_i^{1/2} (\omega - n\omega_{Bi})/\Omega_i$). При больших ξ_i добавки $\delta\epsilon_{02}$, $\delta\epsilon_{22}$, определенные равенствами (15.38), малы, так что в дисперсионном уравнении необходимо удерживать только $\delta\epsilon_{00}$. Дисперсионное уравнение при этом сводится к виду (15.25) с неизменными ϵ'_{12} , ϵ'_{21} , ϵ_{22} и с выражением для $\epsilon'_{11} \rightarrow \epsilon'_{11} + \delta\epsilon_{00}$.

Уравнение (15.25) в пренебрежении ионными резонансами анализировалось в § 15.4. Было показано, что вследствие взаимодействия с резонансными электронами колебания затухают. В зависимости от конкретных условий декремент затухания определяется приближенными соотношениями (15.35) — (15.37).

Кроме затухания волн имеется еще один эффект, связанный с электронами и проявляющийся при конечном β . Этот эффект описывается уравнением (15.30) и состоит в изменении знака величины $1 - \omega_{ni}/\omega$ (этот знак становится положительным) при

$$\beta > 2, \quad (15.51)$$

что соответствует случаю $\text{sgn} \omega \text{Im} \delta\epsilon_{00} > 0$, когда ионы приводят не к нарастанию, а затуханию колебаний.

Ниже примем $\beta < 2$ и рассмотрим, при каких условиях затухание на электронах пересиливает ионную раскачку.

а. Стабилизация возмущений при $\rho_i/a \approx (m_e/m_i)^{1/2}$. В этом случае $z_e \approx 1$, так что электронный декремент порядка выражения (15.36), а ионный декремент порядка (15.48). Видно, что стабилизация таких возмущений наступает уже при малых β :

$$\beta > 3/\ln(m_i/m_e) \approx 0,3. \quad (15.52)$$

б. Стабилизация высших гармоник при $\rho_i/a \gg (m_e/m_i)^{1/2}$. Как и в случае п. 2а, здесь также $z_e \approx 1$ и формула (15.36) остается в силе, тогда как ионный инкремент определяется соотношением (15.48). В результате критерий (15.52) остается в силе.

в. Возмущения с $\omega = \omega_{Bi}$ при $\rho_i/a \gg (m_e/m_i)^{1/2}$. При таких условиях $z_e \approx (a/\rho_i)^2 m_e/m_i \ll 1$, так что для электронного декремента мы имеем оценки (15.35), (15.37). Ионный инкремент при $\beta \ll 1$ порядка (15.50). При $\beta \approx 1$ он определяется дисперсионным уравнением

$$\epsilon'_{11}{}^{(0)} + \epsilon'_{11}{}^{(1)} + \delta\epsilon_{00} = 0, \quad (15.53)$$

где $\epsilon'_{11}{}^{(0)}$, $\epsilon'_{11}{}^{(1)}$ и $\delta\epsilon_{00}$ определены соотношениями (15.27),

(15.29) и (15.38). Решая уравнение (15.53), находим, что соотношение (15.50) остается в силе вплоть до $\beta \approx 1$ [но, конечно, оно существенно изменяется при $\beta > 2$, см. уравнение (15.51)]. Вследствие малости электронного декремента (15.37) стабилизация при малых β не имеет места, так что область неустойчивости простирается вплоть до $\beta \approx 2$.

3. Суммирование результатов. Из предшествующего анализа ионно-циклотронных возмущений видно, что плазма с конечным β более устойчива, чем плазма с $\beta \rightarrow 0$. При конечных β обнаруживается несколько стабилизирующих эффектов.

Один из них связан с размазкой циклотронного резонанса вследствие скоростной зависимости магнитного дрейфа ионов. Этот эффект приводит не к полной стабилизации, а лишь к уменьшению инкремента. Он проявляется при $\beta \geq (m_e/m_i)^{1/4}$.

Если β не слишком мало по сравнению с единицей ($\beta \geq 0,3$), становится существенным эффект магнитного дрейфа электронов. Взаимодействие возмущений с резонансными электронами в плазме с $\beta \approx 1$ приводит к полной стабилизации при условии, что ларморовский радиус ионов не слишком велик, $\rho_i/a \approx (m_e/m_i)^{1/2}$.

Если плазма сильнонеоднородна, $\rho_i/a \gg (m_e/m_i)^{1/2}$, то при $\beta \approx 1$ подавляется неустойчивость на высших гармониках, но остается на гармониках с малыми номерами. В последнем случае инкремент неустойчивости, однако, в несколько раз меньше, чем при $\beta \ll 1$.

Еще один стабилизирующий эффект обнаруживается при $\beta \geq 2$. При таких значениях β фазовая скорость собственных колебаний становится больше скорости ларморовских токов ($\omega/\omega_{ni} > 1$), вследствие чего взаимодействие ионов с такими колебаниями приводит к затуханию последних.

§ 15.6. Стабилизация конусно-градиентной неустойчивости с ростом давления плазмы

Рассмотрим влияние конечного β на конусно-градиентную неустойчивость, обсуждавшуюся в § 5.3. Покажем, что это влияние сказывается уже при малых β , так что ниже полагаем $\beta \ll 1$. Частоту возмущений счи-

таем порядка ионно-циклотронной, $\omega \approx \omega_{Bi}$, так что имеем в виду неустойчивость, описываемую при $\beta \rightarrow 0$ уравнениями (5.53) — (5.55).

Исходные уравнения для интересующей нас задачи можно было бы получить с использованием общих уравнений неоднородной плазмы конечного давления, приведенных в гл. 13. Вместо этого мы, учитывая специфику задачи и соответствующие упрощающие предположения, приведем более простой вывод исходных уравнений.

1. **Исходные уравнения.** Как и в гл. 12, полагаем

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t. \quad (15.54)$$

Вследствие коротковолновости возмущений по отношению к ионам влиянием вихревой части \mathbf{E} и связанного с ней возмущения магнитного поля $\mathbf{V} = \text{rot}\mathbf{A}$ на движение ионов можно пренебречь, и тогда их возмущенная плотность, вычисленная, например, методом интегрирования по траекториям (см. § 4.7), оказывается равной [ср. с (5.53)]

$$n'_i = -\frac{e_i\psi}{m_i} \int_0^\infty de_\perp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{in}^2(\xi)}{\omega - n\omega_{Bi}} \frac{\partial f}{\partial e_\perp}. \quad (15.55)$$

Считая плазму достаточно плотной ($\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$), сводим уравнение Пуассона $\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ к условию квазинейтральности

$$n'_i = n'_e. \quad (15.56)$$

Электроны считаем холодными и описываем их гидродинамическими уравнениями непрерывности и движения:

$$-i\omega n'_e + \text{div}(n_0 \mathbf{V}'_e) = 0; \quad (15.57)$$

$$-i\omega \mathbf{V}'_e = (e_e/m_e)\mathbf{E} + [\mathbf{V}'_e, \omega_{Be}]. \quad (15.58)$$

Из (15.58) находим возмущенную скорость электронов \mathbf{V}'_e , которая при $\omega \ll \omega_{Be}$ приближенно равна

$$\mathbf{V}'_e = \frac{e_e}{m_e\omega_{Be}^2} ([\mathbf{E}, \omega_{Be}] - i\omega\mathbf{E}). \quad (15.59)$$

Подставляя этот результат в (15.57), получаем

$$n'_e = -\frac{e_0 n_0 \psi}{m_e} \left(\frac{k_\perp^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{\kappa k_y}{\omega\omega_{Be}} \right) - \frac{i e_e n_0 \text{rot}_z \mathbf{E}}{m_e \omega_{Be} \omega}. \quad (15.60)$$

Используя уравнения Максвелла $\text{rot}_z \mathbf{E} = i\omega B_z/c$, $ik_y B_z = 4\pi e_e n_0 V'_{xe}$ и x -компоненту уравнения (15.59), которая приближенно означает

$$V'_{xe} = -ik_y e_e \psi / m_e \omega_{Be}, \quad (15.61)$$

выражаем n'_e через ψ :

$$n'_e = \frac{e_e n_0 \psi k_\perp^2}{m_e \omega_{Be}^2} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_\perp^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k_\perp^2 \omega} \right). \quad (15.62)$$

Из (15.55), (15.56) и (15.62) при $\xi \gg 1$ получаем обобщение дисперсионного уравнения (5.54) на случай непотенциальных возмущений:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 \omega} + \frac{m_i}{\pi m_e} \frac{1}{(k\rho_i)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} = 0. \quad (15.63)$$

С помощью этого уравнения можно исследовать устойчивость плазмы с конечным $\beta \leq 1$. При $\beta \geq 1$ необходимо наряду с ∇n_0 учитывать ∇B_0 .

2. **Устойчивость плазмы с конечным β .** Как следует из (15.63), непотенциальность возмущений важна при $k \leq \omega_{pe}/c$. Учитывая это и используя вытекающую из § 5.3 оценку $k\rho_i \approx (m_i/m_e)^{1/3}$, заключаем, что применимость приближения $\beta \rightarrow 0$ нарушается при

$$\beta \geq (m_e/m_i)^{1/3}. \quad (15.64)$$

Пусть условие (15.64) выполнено. При этом уравнение (15.63) имеет комплексные решения, если частота электронных колебаний

$$\omega^{(0)} = -\frac{\kappa k_y \omega_{Be}}{k^2 [1 + \omega_{pe}^2/c^2 k^2]} \quad (15.65)$$

порядка или больше ионно-циклотронной частоты ω_{Bi} . Это условие может быть выполнено только при

$$\kappa \geq 2(m_e/m_i) \omega_{pe}/c. \quad (15.66)$$

Это граница неустойчивости плазмы с $\beta > (m_e/m_i)^{1/3}$. Условие (15.66) можно записать в виде, аналогичном (5.43):

$$\kappa r_i \geq 2 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{2/3} \left(\frac{m_i \beta^3}{m_e} \right)^{1/3}. \quad (15.67)$$

Видно, что критическое значение относительного градиента плотности κ , начиная с которого плазма неустойчива, растет с ростом β как $\beta^{1/2}$. Это обстоятельство можно считать благоприятным с точки зрения проблемы устойчивого удержания плазмы. При $\beta \approx 1$ градиент неустойчивой плазмы должен быть таким, что

$$\kappa r_i \geq 2(m_e/m_i)^{1/2}. \quad (15.68)$$

Вследствие непотенциальности возмущений уменьшается их инкремент. При $\beta > (m_e/m_i)^{1/3}$ и значениях κ , немалого больших правой части (15.67),

$$\gamma \approx \frac{\omega_{Bi}}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{m_e}{m_i \beta^3} \right)^{1/4}. \quad (15.69)$$

В отличие от случая $\beta \rightarrow 0$, инкремент мал по сравнению с ионно-циклотронной частотой.

3. Неустойчивость плазмы конечного давления с малой примесью слегка нагретых максвелловских ионов. При наличии группы максвелловских ионов с плотностью $n_1 = \alpha n_0 \ll n_0$ дисперсионное уравнение (15.63) заменяется следующим:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} + \frac{\kappa k_y \omega_{pe}^2}{k^2 \omega} + \frac{\alpha m_i}{m_e (k r_i)^2} \left[1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega I_n(z_1) \exp(-z_1)}{\omega - n \omega_{Bi}} \right] + \frac{m_i}{\pi m_e} \frac{1}{(k r_i)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n \omega_{Bi}} = 0. \quad (15.70)$$

Здесь $r_i = (T_1/m_i \omega_{Bi}^2)^{1/2}$ — ларморовский радиус максвелловских ионов; T_1 — их температура, $z_1 = (k r_i)^2$.

Оценим с помощью (15.70), как влияют на устойчивость максвелловские ионы, если градиент плотности не очень велик, так что неравенство (15.67) не сильное. При этом характерное k порядка ω_{pe}/c , так что

$$z_1 \approx \beta T_1/m_e v_0^2. \quad (15.71)$$

Пусть

$$T_1 \geq m_e v_0^2 / \beta. \quad (15.72)$$

Тогда z_1 в уравнении (15.70) можно считать большим, $z_1 \gg 1$, $I_n(z_1) \exp(-z_1) \approx (2\pi z_1)^{-1/2}$. Неустойчивость невозможна, если коэффициент при резонансном знаменателе максвелловских ионов больше, чем соответствующий коэффициент от быстрых немаксвелловских ионов. Это условие сводится к следующему:

$$\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{T_1}{m_i v_0^2} \right)^{3/2}. \quad (15.73)$$

При $\beta \approx 0,1$ условия (15.72) и (15.73) означают, что конусно-градиентная неустойчивость подавляется, если $T_1 \approx 10^{-2} m_i v_0^2$, $\alpha \approx 10^{-2}$.

§ 15.7. Градиентная раскачка альфвеновских волн в струе плазмы конечного давления с неоднородным профилем скорости

В § 14.5 была рассмотрена альфвеновская неустойчивость плазмы низкого давления, $\beta \ll 1$, движущейся вдоль магнитного поля с неоднородным профилем скорости. Теперь примем β конечным. При этом из дисперсионного уравнения (13.54) получаем вместо (14.37)

$$\omega'^2 - \omega'(\omega_{pi}^* + \Omega_i) - k_z^2 c_A^2 + \Omega_i \omega_{pi}^* (1 + \partial \ln T_i / \partial \ln \rho_i) - (k_y k_z T_i / m_i \omega_{Bi}) dV/dx = 0. \quad (15.74)$$

В пренебрежении градиентами давления и магнитного поля отсюда вытекают результаты (14.38) и (14.39), свидетельствующие о неустойчивости. При наличии гра-

диента плотности ($\nabla n_0 \neq 0, \nabla T = 0$) неустойчивость подавляется, если

$$d \ln n_0 / d \ln V > (V/c_A) (1 + \beta_i/2)^{-1/2}. \quad (15.75)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ к гл. 15

**Безынерционные неустойчивости
бесстолкновительной плазмы конечного давления**

Как отмечалось в § 13.9, в пределе $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$ общее дисперсионное уравнение низкочастотных ($\omega \ll \omega_{Bi}$) колебаний плазмы конечного давления распадается на два: (13.53) и (13.54). Согласно сказанному в § 13.9, первое из них описывает безынерционные возмущения, второе — инерционные. Выясним картину безынерционных неустойчивостей максвелловской плазмы конечного давления с однородной температурой и плотностью. (Обсуждению инерционных неустойчивостей в приближении $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$ посвящен § 15.3.)

1. Возмущения с $|\omega - \omega_{me}| \gg k_z v_{Te}$

а. *Случай с $k_z = 0$.* Согласно § 13.9, в пределе $k_z \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение безынерционных колебаний расщепляется еще на два уравнения:

$$\epsilon_{22}^{(0,0)} - c^2 k^2 / \omega^2 = 0; \quad (П.15.1)$$

$$\epsilon_{33}^{(0,0)} = 0. \quad (П.15.2)$$

Следствия, вытекающие из (П.15.1), были проанализированы в § 15.2. Теперь рассмотрим возмущения, описываемые уравнениями (П.15.2).

Учитываем, что, согласно § 13.9, выражение для $\epsilon_{33}^{(0,0)}$ имеет вид

$$\epsilon_{33}^{(0,0)} = - \sum_{i,e} \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega} \widehat{T}(\zeta); \quad \zeta = \zeta_0. \quad (П.15.3)$$

Входящие сюда символы были разъяснены в § 13.9.

Проведем количественный анализ дисперсионного уравнения (П.15.2) в предположении $\beta \ll 1, \omega \gg \Omega$ и качественно экстраполируем получающиеся при этом результаты на область $\beta \approx 1, \omega \approx \Omega$.

Предположив выполненными указанные неравенства, находим частоту и инкремент колебаний типа (П.15.2):

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega = \omega_{pe}^* \\ \gamma = \pi \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{2}{\beta} \frac{\eta}{1 + \eta} \right) \frac{\omega_{pe}^{*2}}{|\Omega_i|} \exp \left(- \frac{2}{\beta} \frac{T_e}{T_i} \right), \end{aligned} \right\} \quad (П.15.4)$$

Инкремент обязан взаимодействию с колебаниями резонансных ионов и потому содержит малые члены порядка m_e/m_i . По порядку величины

$$\gamma / \text{Re } \omega \approx (m_e/m_i \beta) \exp(-2/\beta). \quad (П.15.5)$$

Видно, что неустойчивость возможна даже при $\nabla T = 0$ ($\eta = 0$).

б. *Возмущения с малыми, но конечными k_z .* Результат (П.15.4) относится к возмущениям с очень малыми $k_z, k_z v_{Te} / \omega_* < (m_e/m_i)^{1/2}$. В противном случае, когда

$$(m_e/m_i)^{1/2} < k_z v_{Te} / \omega_* < 1, \quad (П.15.6)$$

частота возмущений (П.15.4) остается прежней, а инкремент определяется членами уравнения (13.53), пропорциональными k_z^2 .

При $\beta \ll 1$ и $\omega \gg \Omega$ такие возмущения описываются следующим уравнением, вытекающим из (13.53):

$$\epsilon_{33}^{(0,0)} + \frac{(i\epsilon_{32})^2}{N^4} \text{Im } \epsilon_{22}^{(0,0)} = 0; \quad N \equiv ck/\omega. \quad (П.15.7)$$

В качестве $i\epsilon_{32}, \text{Im } \epsilon_{22}^{(0,0)}$ сюда, согласно (13.57), можно подставить выражения

$$\left. \begin{aligned} i\epsilon_{32} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{k_y k_z T_e}{m_e \omega^2} \left[1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} (1 + 2\eta) \right]; \\ \text{Im } \epsilon_{22}^{(0,0)} = \pi \frac{\beta_i}{2} N^2 \frac{\omega^3}{|\Omega_i|^3} \left(1 + \frac{2}{\beta} \frac{\eta}{1 + \eta} \right) \exp \left(- \frac{\omega}{\Omega_i} \right). \end{aligned} \right\} \quad (П.15.8)$$

Инкремент возмущений равен

$$\begin{aligned} \gamma = 2\pi \frac{\beta_e \beta_i}{\beta^3} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^3 \frac{k_z^2 T_e \eta^2}{m_e |\omega_{pe}^*|} \times \\ \times \left(1 + \frac{2}{\beta} \frac{\eta}{1 + \eta} \right) \exp \left(- \frac{2}{\beta} \frac{T_e}{T_i} \right). \end{aligned} \quad (П.15.9)$$

Неустойчивость имеет место при

$$\eta > 0 \quad \text{либо при} \quad \eta < -1. \quad (П.15.10)$$

2. Возмущения с $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$.

В пренебрежении членами порядка $\omega/k_z v_{Te}, (k_z v_{Ti}/\omega)^2$ уравнение (13.53) для таких возмущений можно привести к виду

$$\widehat{I}_e \left(\frac{\Omega_e}{\omega} \right) \widehat{I}_e^{-1} \frac{T_e}{T_i} \widehat{I}_i \left(\left\langle \frac{\epsilon_{\perp} \Omega_i}{\omega - \epsilon_{\perp} \Omega_i} \right\rangle \right) \widehat{I}_e (1 - \Omega_e/\omega) = 0. \quad (П.15.11)$$

а. Ветвь $\omega \approx \omega_{pe}$ в плазме с $\beta \ll 1$. При малых β один из корней этого уравнения приближенно совпадает с ветвью (6.6), (14.3):

$$\omega = \omega_{pe}. \quad (\text{П.15.12})$$

Согласно гл. 6 и 14, учет взаимодействия резонансных электронов с этой волной (члены порядка $\omega/k_z v_{Te}$) приводит к затуханию последней при $\eta > 0$ и раскачке при $\eta < 0$. При этом инкремент колебаний по порядку величины равен

$$\gamma \approx - \frac{\omega_{pe}^2}{|k_z| v_{Te}} \eta. \quad (\text{П.15.13})$$

Считая β малым, рассмотрим роль членов порядка β в колебаниях типа (П.15.12). Основной эффект, связанный с конечностью β , — это резонансное взаимодействие ионов с колебаниями. Из (П.15.11) находим, что за счет этого колебания могут раскачиваться (либо затухать) с инкрементом

$$\gamma = -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_i|} \frac{1 + T_i/T_e + 2\eta/\beta}{(1 + T_i/T_e)^2} \exp\left(-\frac{2}{\beta} \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{1 + \eta}\right). \quad (\text{П.15.14})$$

Из (П.15.14) видно, что ионы резонансно взаимодействуют с колебаниями при $\eta > -1$. Колебания затухают при любых положительных η , а также при $-\beta < \eta < 0$. Раскачка возможна лишь при

$$-1 < \eta < -\beta. \quad (\text{П.15.15})$$

Сопоставим этот результат с (П.15.10), свидетельствующим о раскачке при $\eta > 0$ колебаний с $\omega = \omega_{pe}^*$ (при $\omega > k_z v_{Te}$). В случае волн типа (П.15.10) $\text{Re } \epsilon_{33} = -(\omega_{pe}/\omega)^2 (1 - \omega_{pe}^*/\omega)$, так что энергия колебаний $W \sim \omega \text{Re } \epsilon_{33} / \partial \omega$ отрицательна. В случае же (П.15.12) $\text{Re } \epsilon_{33} = -(k d_e)^{-2} (1 - \omega_{pe}/\omega)$, так что $W > 0$. Поэтому ионы, в обоих случаях отбирая энергию у волн, в первом случае приводят к раскачке колебаний, а во втором — к затуханию (в соответствии с общими результатами § 3.6 т. 1).

б. Ветвь $\omega = \omega_{pe}^*$ в плазме с $\beta \gg 1$. При $\beta \gg 1$ и $\omega \ll (\Omega_i, \Omega_e)$ уравнение (П.15.11) сводится к следующему:

$$\hat{l}_e \Omega_e = \frac{i\pi \omega^2}{4} \frac{T_e}{T_i} \hat{l}_i \left(\frac{1}{|\Omega_i|} \right) \frac{\hat{l}_e}{(1 + T_e/T_i)^2}. \quad (\text{П.15.16})$$

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega = \omega_{pe}^* \\ \gamma = \frac{\pi \eta^2}{(1 + \eta)^2} \left(\frac{2}{\beta} \right)^2 \frac{|\omega_{pe}^*|}{(1 + T_i/T_e)^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.15.17})$$

Если $T_i = T_e$, то колебания неустойчивы лишь при

$$\eta < -1. \quad (\text{П.15.18})$$

При $T_i > T_e$ инкремент может стать положительным и в случае $\eta > 0$, а именно при

$$\eta > \frac{1 + T_e/T_i}{1 - T_e/T_i}. \quad (\text{П.15.19})$$

в. *Магнитодрейфовая ветвь*, $\omega \approx \Omega_i$. Покажем, что даже при $\beta \ll 1$ уравнение (П.15.11) может иметь еще один корень, существенно зависящий от частоты магнитного дрейфа Ω_i . Это вытекает из следующего анализа, справедливого при произвольных β .

Полагаем $\omega \ll \Omega_i$. Входящий в (П.15.11) интеграл в этом случае приближенно равен

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\epsilon_{\perp} \Omega_i}{\omega - \epsilon_{\perp} \Omega_i} \right\rangle &= \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_{\perp} \Omega_i \exp(-\epsilon_{\perp}) d\epsilon_{\perp}}{\omega - \epsilon_{\perp} \Omega_i} = \\ &= - \left\{ 1 + \frac{\omega}{\Omega_i} \ln(\Omega_i/\omega) + i\pi \text{sgn } \Omega_i \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.15.20})$$

Подставляя (П.15.20) в (П.15.11), находим

$$\omega = -\Omega_i \exp \left\{ \frac{T_i}{T_e} \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \left[\frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) + \frac{1}{(1 + \eta)^2} \right] \right\}. \quad (\text{П.15.21})$$

Здесь было учтено, что $\ln(\Omega_i/\omega) + i\pi \text{sgn } \Omega_i = -\ln(-\Omega_i/\omega)$.

Поскольку мы предполагали $\omega \ll \Omega_i$, то условие применимости формулы (П.15.21) есть

$$0 < (\eta - 1)(\eta + 1) \ll 1. \quad (\text{П.15.22})$$

Согласно (П.15.21), $\omega/\Omega_i < 0$, так что резонансное взаимодействие ионов с колебаниями отсутствует. Для нахождения инкремента необходимо учесть взаимодействие колебаний с электронами [добавить в (П.15.11) члены порядка $\omega/k_z v_{Te}$]. Тогда вместо (П.15.22) получаем

$$\omega = \omega^{(0)} \exp \left(-i \frac{\beta}{2} \sqrt{\pi} \frac{\omega_{pe} - \omega_{Te}/2}{|k_z| v_{Te}} \frac{T_i}{T_e} \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right), \quad (\text{П.15.23})$$

где $\omega^{(0)}$ — правая часть (П.15.21). Колебания затухают при $\eta > 1$ и раскачиваются при

$$\eta < -1. \quad (\text{П.15.24})$$

На пределах применимости (П.15.21) $|\omega| \approx \Omega_i$. Поэтому можно ожидать, что при $|\eta| \gg 1$ эта ветвь колебаний будет обладать частотой, превышающей Ω_i . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (П.15.11) при $\omega \gg \Omega_i$ и $|\eta| \gg 1$. В пренебрежении членами порядка Ω_i/ω интеграл в (П.15.11) равен

$$\left\langle \frac{\epsilon_{\perp} \Omega_i}{\omega - \epsilon_{\perp} \Omega_i} \right\rangle = \frac{\Omega_i}{\omega}. \quad (\text{П.15.25})$$

Подставляя это в (П.15.11), полагая $\omega \ll (\omega_{Te}, \omega_{Ti})$, $\beta \ll 1$ и учитывая $|\eta| \gg 1$, приходим к квадратному уравнению для ω :

$$\omega^2 - \omega\omega_{ne} - \frac{\omega_{Te} \Omega_i}{1 + T_i/T_e} = 0. \quad (\text{П.15.26})$$

При $\eta < 2/\beta$ больший корень этого уравнения дает ветвь (П.15.12), а меньший равен

$$\omega = -\eta \frac{\Omega_i}{1 + T_i/T_e}. \quad (\text{П.15.27})$$

Это ω велико по сравнению с Ω_i как раз при $\eta \gg 1$. С другой стороны, на пределе применимости, при $\eta \approx 1$, из (П.15.26) следует $\omega \approx \Omega_i$, т. е. то же, что и из (П.15.21). Это позволяет отнести колебания (П.15.21) и (П.15.27) к одной и той же ветви.

При учете резонансных электронов вместо (П.15.26) из (13.53) следовало бы

$$\omega^2 \left(1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega_{Te}}{2 |k_z| v_{Te}} \right) - \omega\omega_{ne} - \frac{\Omega_i \omega_{pi}^*}{1 + T_i/T_e} = 0. \quad (\text{П.15.28})$$

Отсюда находим инкремент колебаний типа (П.15.27)

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} (\text{Re } \omega)^2 \eta}{|k_z| v_{Te}}, \quad (\text{П.15.29})$$

где $\text{Re } \omega$ дается формулой (П.15.27). Видно, что имеет место неустойчивость, если η положительно и велико:

$$\eta \gg 1. \quad (\text{П.15.30})$$

3. Возмущения с $(\omega, \Omega_i) \approx k_z v_{Ti}$

В условиях, когда величины $\omega, \Omega_i, k_z v_{Ti}$ — все одного порядка, $\omega \approx \Omega_i \approx k_z v_{Ti}$, уравнение (13.53) имеет вид

$$2 - i \sqrt{\pi} \hat{L}_i \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{Ti}} \langle W \rangle \right) - i \sqrt{\pi} \frac{\beta}{2\Omega_i} \hat{L}_i \left(\Omega_i^2 \frac{\omega}{|k_z| v_{Ti}} \times \right. \\ \left. \times \langle \epsilon_{\perp}^2 W \rangle \right) + \frac{\pi\beta}{4} \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \left[\hat{L}_i \left(\frac{\langle W \rangle}{|k_z| v_{Ti}} \right) \hat{L}_i \left(\frac{\Omega_i^2}{|k_z| v_{Ti}} \langle \epsilon_{\perp}^2 W \rangle \right) - \right. \\ \left. - \left[\hat{L}_i \left(\frac{\Omega_i}{|k_z| v_{Ti}} \langle \epsilon_{\perp} W \rangle \right) \right]^2 \right] = 0. \quad (\text{П.15.31})$$

Здесь $W = W [(\omega - \Omega_i \epsilon_{\perp}) / |k_z| v_{Ti}]$.

В пределе $\beta \rightarrow 0$, когда члены с β и Ω_i не важны, это уравнение описывает неустойчивости, рассмотренные в п. 1 § 6.2. В этом предельном случае, согласно указанному пункту, плазма неустойчива при $\eta < 0$ и $\eta > 0,96$.

В пределе $k_z v_{Ti} / \omega \rightarrow 0$ (П.15.31) сводится к уравнению (П.15.11), исследованному в предыдущем пункте. Там было показано, что неустойчивость в этих условиях развивается, если только $\eta < 0$ (приближение $\omega / k_z v_{Ti} \rightarrow 0$).

Ввиду сложности уравнения (П.15.31) при конечных β мы рассмотрим его только в ряде предельных случаев, считая β малым (но конечным) либо большим по сравнению с единицей.

а. Возмущения с $\omega > k_z v_{Ti}$ в плазме с малым, но конечным β . С такими возмущениями при $\beta \rightarrow 0$ и $|\eta| \gg 1$ связана гидродинамическая неустойчивость типа (6.24). Рассмотрим влияние эффектов порядка β на эту неустойчивость.

Полагая $\beta \ll 1$, $k_z v_{Ti} \ll \omega$, $\nabla n_0 = 0$, из (П.15.31) находим [ср. с (6.23)]

$$\omega^3 + \omega \frac{\omega_{Ti} \Omega_i}{2} - \frac{k_z^2 T_i}{m_i} \omega_{Ti} = 0. \quad (\text{П.15.32})$$

Вычисляем дискриминант этого кубического уравнения и получаем, что все три корня вещественны (неустойчивость не развивается), если

$$k_z v_{Ti} / \omega_{Ti} < \beta^{3/4} / \sqrt{2} \cdot 3^{3/4}. \quad (\text{П.15.33})$$

При сильном неравенстве (П.15.33) корни (П.15.32) равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1,2} &= \pm (\sqrt{\beta} / 2) \omega_{Ti}; \\ \omega_3 &= -k_z^2 T_i / m_i \Omega_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.15.34})$$

Корни $\omega_{1,2}$ получаются также и из (П.15.26).

Результат (П.15.33), (П.15.34) свидетельствует о стабилизации возмущений с достаточно малыми k_z .

б. Возмущения с $\omega < k_z v_{Ti}$ в плазме с малым, но конечным β . При $\beta \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение допускает решение с $\omega \ll k_z v_{Ti}$, если $\eta \approx 2$ [см. § 6.2, уравнение (6.28)]. Полагаем теперь β малым по сравнению с единицей, но отличным от нуля. Считая в (П.15.31) $(\omega, \Omega_i) \ll k_z v_{Ti}$, $\omega_{pi} \gg k_z v_{Ti}$, $\eta \approx 2$, получаем вместо (6.28):

$$\omega = \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_{ni}} - \Omega_i (\pi - 3) - i \sqrt{\pi} |k_z| v_{Ti} (1 - 4\beta - \eta/2). \quad (\text{П.15.35})$$

Видно, что в принятом приближении граница неустойчивости сдвигается в сторону меньших η :

$$\eta = 2(1 - 4\beta), \quad \beta \ll 1. \quad (\text{П.15.36})$$

Таким образом, в возмущениях данного типа конечное β играет дестабилизирующую роль — неустойчивой оказывается плазма с меньшим η . Этот эффект аналогичен сдвигу границы неустойчивости в область меньших η за счет конечных z_i (см., например, рис. 6.6).

в. Возмущения с $\omega < (k_z v_{Ti}, \Omega_i)$ при $\beta \gg 1$. Теперь рассмотрим плазму с $\beta \gg 1$. При этом $\Omega_i \gg (\omega_{ni}, \omega_{Ti})$. По этой причине инте-

ресными с точки зрения теории неустойчивостей могут быть только возмущения с $\omega \ll \Omega_i$, так как в противном случае градиентные члены ($\sim \nabla n_0, \nabla T$) выпадают из дисперсионного уравнения, а согласно общей теореме § 2.6 т. 1, однородная плазма устойчива. Случай возмущений с $k_z v_{Ti} < \omega < \Omega_i$ обсуждался в п. 2. Поэтому при $\beta \gg 1$ достаточно рассмотреть возмущения с

$$\omega < (k_z v_{Ti}, \Omega_i). \quad (\text{П.15.37})$$

При условии (П.15.37) в функциях W , входящих в (П.15.31), можно пренебречь членами с ω . Квадратичные по W члены этого уравнения опускаем ввиду того, что они входят с малым весом $(\omega/k_z v_{Ti})^2$. Опуская другие малые члены уравнения (П.15.31), получаем линейное относительно ω уравнение:

$$\omega = - \frac{4i}{\pi\beta} \frac{|k_z| v_{Ti}}{\langle \varepsilon_{\perp}^2 W \rangle} + \frac{k_y T}{m_i \omega B l} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{n_0 \Omega_i}{v_{Ti}} \langle \varepsilon_{\perp}^2 W \rangle \right);$$

$$W = W(-\varepsilon_{\perp} \Omega_i / |k_z| v_{Ti}). \quad (\text{П.15.38})$$

При $k_z v_{Ti} \gg \Omega_i$ это соответствует аperiodически затухающим возмущениям однородной плазмы с декрементом:

$$\gamma = - \frac{2}{\sqrt{\pi\beta}} |k_z| v_{Ti}. \quad (\text{П.15.39})$$

Поскольку $\text{Re} W > 0$ при всех значениях аргумента, то из (П.15.38) сразу же вытекает, что затухающими являются возмущения с любыми $k_z v_{Ti} / \Omega_i$, если $\eta = 0$, так как мнимый вклад в частоту при этом возникает только от первого члена правой части (П.15.38).

При $\eta \neq 0$ из (П.15.38) находим, что инкремент пропорционален величине

$$\gamma \sim - \left\{ \text{Re} \langle \varepsilon_{\perp}^2 W \rangle \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\eta}{1 - \eta} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \text{Im} \langle \varepsilon_{\perp}^2 x W \rangle + \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \text{Im} \langle \varepsilon_{\perp}^2 W \rangle \text{Re} \langle \varepsilon_{\perp}^2 x W \rangle \right\}, \quad (\text{П.15.40})$$

где $x = -\Omega_i \varepsilon_{\perp} / |k_z| v_{Ti}$. Покажем, что $\gamma < 0$ при всех $\eta > 0$. При $\eta > 0$ второй член в фигурной скобке положительен, и его знак мог бы стать отрицательным лишь за счет отрицательного знака простой скобки. Однако

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\eta}{1 - \eta} \text{Im} \langle \varepsilon_{\perp}^2 x W \rangle < \langle \varepsilon_{\perp}^2 \rangle \frac{\sqrt{\pi}}{4} \max \text{Im} (xW) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \max \text{Im} (xW). \quad (\text{П.15.41})$$

С помощью таблиц для W убеждаемся, что $\max \text{Im} (xW) < 2/\sqrt{\pi}$, откуда вытекает отрицательность γ .

Таблица безынерционных неустойчивостей плазмы конечного давления с $\eta \gg 0$

Относительный градиент температуры	Волновое число нарастающих возмущений	Частота по порядку к величине	Инкремент по порядку величины	Для каких β был получен результат	Дополнительные условия	Формулы
$\eta \approx 0$	$k_z < \omega_*/v_{Te}$	ω_*	$\frac{m_e}{m_i \beta} \exp\left(-\frac{2}{\beta}\right) \omega_*$	$\beta < 1$	$T_e \approx T_i$	(П.15.4) (П.15.5)
$0 < \eta \leq 1$	$k_z < \omega_*/v_{Te}$	ω_*	$\frac{\eta^2}{\beta} \exp\left(-\frac{2}{\beta}\right) \omega_*$	$\beta < 1$	$T_e \approx T_i$	(П.15.9) (П.15.10)
$\eta > 1$	$k_z < \omega_*/v_{Te}$	$\omega_* \beta$	$\omega_* \beta$	$\beta \leq 1$	$T_e \approx T_i$	(П.15.2) (П.15.4)
	$\omega_*/v_{Te} < k_z < \omega_*/v_{Ti}$	ω_*	ω_*/β^2	$\beta > 1$	$T_i > T_e$	(П.15.17) (П.15.19)
	$\omega_*/v_{Te} < k_z < \omega_*/v_{Ti}$	$\eta \beta \omega_*$	$\eta^2 \omega_*^2 \beta^2 / k_z v_{Te}$	$\beta < 1$	$T_i \approx T_e$	(П.15.29) (П.15.30)
	$k_z \approx \omega_*/v_{Ti}$	ω_*	ω_*	$\beta \leq 1$	$T_i \approx T_e$	(П.15.32) (П.15.33) (П.15.36)

4. Суммирование результатов

Проведенный выше анализ обнаруживает, что при $\nabla T=0$ и конечном β безынерционные возмущения не раскачиваются ни при каких k_z , кроме $k_z \leq \omega_*/v_{Te}$. При $k_z \leq \omega_*/v_{Te}$ возмущения хотя и раскачиваются, но с очень малым инкрементом — порядка $\gamma \approx (m_e/m_i)\omega_*$. Эта неустойчивость может гаситься слабыми столкновениями электронов с ионами.

При $\eta = d \ln T / d \ln n_0$ для раскачки возмущений, вообще говоря, требуется некоторый порог типа $\eta \geq 1$. Исключение из этого правила составляют возмущения с $k_z \approx \omega_*/v_{Te}$, нарастающие при малом положительном η с инкрементом, несколько меньшим $\eta^2 \omega_*$.

Наиболее обширным является класс нарастающих возмущений в плазме с $\eta < 0$. К такому относятся возмущения как с $k_z \leq \omega_*/v_{Te}$, так и с большими k_z , — вплоть до $k_z \leq \omega_*/v_{Ti}$.

Используя результаты настоящего параграфа, можно получить качественно полную картину безынерционных неустойчивостей плазмы с заданным η . Такая картина отражена в приводимой здесь таблице. В ней собраны результаты, относящиеся к плазме с $\eta \geq 0$. Аналогично можно произвести систематизацию неустойчивостей и при $\eta < 0$.

Библиографический обзор к гл. 15

1. Церковников Ю. А. Устойчивость плазмы в сильном магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 32, с. 67. Впервые исследовались неустойчивости, рассмотренные в § 15.2, 15.3.
2. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. Колебания неоднородной плазмы в магнитном поле.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 37, с. 1337. Рассматривались волны Церковникова, § 15.2, а также исследовалась возможность раскачки быстрых магнитно-звуковых волн ($\omega = kc_A$) в сильнонеоднородной плазме с $\nabla T \neq 0$.
3. Krall N. A., Rosenbluth M. N. Low-frequency stability of nonuniform plasmas.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 254. Исследовались возмущения с $k_z=0$ типа обыкновенной волны, $E \parallel B_0$, с частотами, малыми по сравнению с ионно-циклотронной. Обсуждались также возмущения с $k_z=0$ и $E \perp B_0$.
4. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. Желобковые возмущения плазмы в винтовом магнитном поле.—«Ядерный синтез», 1963, т. 3, с. 276. Исследовались неустойчивости $k_z=0$, $\omega \ll \omega_{Bi}$, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$, связанные с резонансным взаимодействием частиц с волнами альфвеновского типа, § 15.3.
5. Михайловский А. Б., Фридман А. М. Дрейфовые волны в плазме конечного давления.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 51, с. 1430. Анализировались неустойчивости с $k_z \neq 0$, связанные с возмущениями магнитно-звукового типа. См. приложение к настоящей главе.

6. Ishihara T. Instabilities of drift magnetosonic waves due to the magnetic drift resonance.—«J. Plasma Phys.», 1973, v. 9, p. 389. Методом Найквиста исследовались неустойчивости с $k_z=0$, $k_z \neq 0$, связанные с возмущениями магнитно-звукового типа.
7. Михайловский А. Б., Фридман А. М. Резонансное взаимодействие с частицами волн альфвеновского типа в неоднородной плазме конечного давления.—«Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1782. Рассмотрены неустойчивости, обусловленные раскачкой альфвеновских волн с $k_z \neq 0$ резонансными частицами, § 15.3.
8. Mikhailovsky A. B. Ion-cyclotron drift instability in a finite- β plasma.—«Nucl. Fusion», 1971, v. 11, p. 323. Исследовались коротковолновые низкочастотные возмущения, § 15.4, и ионно-циклотронные возмущения, § 15.5.
9. Krall N. A., Rosenbluth M. N. Trapping instabilities in a slightly inhomogeneous plasma.—«Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 1435. Исследовались ионно-циклотронные возмущения вдали от «точки пересечения» циклотронной и градиентной ветвей колебаний.
10. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы.—В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. А. М. Леонтовича. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70.
11. Tang W. M., Pearlstein L. D., Berk H. L. Finite Beta Stabilization of the Drift Cone Instability.—«Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 1153. В работах [10, 11] исследовалась градиентно-конусная неустойчивость в плазме конечного давления, § 15.6.
12. Dobrowolny M. Kelvin—Helmholtz instability in a high- β collisionless plasma.—«Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 2263. Изучалась раскачка альфвеновских волн в струе плазмы с неоднородным профилем скорости, § 15.7.
13. Hasegawa A. Drift-wave instabilities of a compressional mode in a high- β plasma.—«Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 27, p. 11.
14. Михайловский А. Б. О «дрейфовых» термоядерных неустойчивостях.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 68, с. 1772. В работах [13, 14] исследовалась градиентная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн ($\omega = kc_A$) группой быстрых частиц.
15. Фридман А. М. Медленные непотенциальные волны в неоднородной плазме.—«Журн. техн. физ.», 1969, т. 39, с. 1350.
16. Гурович В. Ц., Найдорф Б. Ю., Фридман А. М. Раскачка волн альфвеновского типа в неоднородной плазме конечного давления.—«Журн. техн. физ.», 1970, т. 40, с. 441. В работах [15–16] содержатся некоторые результаты о колебаниях плазмы конечного давления, дополняющие изложенные выше.

Глава 16

НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ

§ 16.1. Введение

Столкновительная плазма конечного давления обнаруживает большое число различных типов неустойчивостей, связанных с низкочастотными ($\omega \ll \omega_{Bi}$) длинноволновыми ($k_{\perp} \rho_i \ll 1$) возмущениями. Как и в случае бесстолкновительной плазмы, эти возмущения можно отнести к одному из двух типов: безынерционным (или возмущениям магнитно-звукового типа) и инерционным (или возмущениям альфвеновского типа).

Вначале (в § 16.2) мы проанализируем неустойчивости, связанные с раскачкой безынерционных возмущений с $k_z = 0$, пренебрегая при этом малыми диссипативными эффектами порядка ω/v_i , $(k_{\perp} \rho_i)^2 v_i/\omega$. Безынерционные волны с $k_z = 0$ называются также энтропийными. Они представляют собой столкновительный аналог волн Церковникова, исследованных в § 15.2.

Исследование неустойчивостей столкновительной плазмы с учетом диссипативных эффектов (вязкости, теплопроводности и т. п.) требует использования соответствующих уравнений переноса. Вывод уравнений переноса, пригодных для описания возмущений с произвольным k_z и конечным $k_{\perp} \rho_i$, дан в приложении 1, а упрощение этих уравнений на случай $k_z \rightarrow 0$, $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$ производится в приложении 2. С использованием результатов, полученных в приложениях 1, 2, в приложении 3 рассматривается неустойчивость энтропийных волн, обусловленная диссипативными эффектами порядка ω/v_i .

Исследованию инерционных (альфвеновских) возмущений с $k_z = 0$ посвящены § 16.2, где полагается $\nabla T = 0$, а также приложение 4, где рассматривается роль градиента температуры, $\nabla T \neq 0$. Роль диссипативных эффектов порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2 v_i/\omega$ в возмущениях с $k_z = 0$ (безынерционных и инерционных) обсуждается в приложении 5.

Неустойчивости с $k_z \neq 0$ исследуются в § 16.4, где полагается $\omega \approx (k_z v_{Te})^2/v_e$, [и в § 16.5, где принято $\omega \approx k_z v_{Ti}$].

В § 16.6 рассматривается плазма конечного давления, находящаяся в поле тяжести, и исследуется возможность развития в такой плазме желобковой неустойчивости.

§ 16.2. Безынерционные (энтропийные) волны в столкновительной плазме конечного давления

Полагаем $k_z = 0$, $E_z = 0$, $\mathbf{V}' \parallel \mathbf{z}$. При этих предположениях кинетическое уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_{\perp} \nabla f + \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\perp} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} = \omega_B \frac{\partial f}{\partial \alpha} + C. \quad (16.1)$$

Считаем здесь столкновительный член C большим, что оправдывается при $v_{ii} \gg \omega$. Полагаем $f = \bar{f} + \tilde{f}$ (ср. с (7.15)) и используем процедуру разложения в ряд по малым параметрам (7.19). Главные члены по ε в \tilde{f} имеют вид (7.24). Подставляем это \tilde{f} в уравнение для \bar{f} , учитываем непотенциальность электрического поля и неоднородность магнитного. Тогда получаем [ср. с (7.25)]

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla \bar{f} - \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varepsilon_{\perp}} \operatorname{div} \mathbf{V}_E + \varepsilon_{\perp} \left[\nabla \bar{f}, \nabla \frac{1}{\omega_B} \right]_z = \bar{C}. \quad (16.2)$$

Далее полагаем \bar{f} в левой части равенства максвелловским и берем от этого уравнения моменты. В результате получаем уравнения для n и T :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla n + n \operatorname{div} \mathbf{V}_E + \left[\nabla \frac{p}{m}, \nabla \frac{1}{\omega_B} \right]_z &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}_E \nabla p + \frac{5}{3} p \operatorname{div} \mathbf{V}_E + \frac{5}{3} \left[\nabla \frac{pT}{m}, \nabla \frac{1}{\omega_B} \right]_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Из сравнения ионного уравнения непрерывности (16.3) с соответствующим уравнением системы (7.44) и

из анализа структуры (7.44) в § 7.3 следует, что в (16.3) не учтены члены с поперечной инерцией и магнитной вязкостью ионов. В этом смысле возмущения, описываемые уравнениями (16.3), можно называть *безынерционными*.

Линеаризация уравнений (16.3) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega \frac{n'}{n_0} + i\Omega \frac{p'}{p_0} + \frac{cE_y}{B_0} (\kappa_n - \kappa_B) + i \frac{B'_z}{B_0} (\omega - \omega_p^*) &= 0; \\ -i \frac{p'}{p_0} \left(\omega - \frac{10}{3} \Omega \right) - i \frac{5}{3} \frac{n'}{n_0} \Omega + \frac{cE_y}{B_0} \left(\kappa_p - \frac{5}{3} \kappa_B \right) + \\ + i \frac{5}{3} \frac{B'_z}{B_0} (\omega - 2\omega_p^* + \omega_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Выражая отсюда возмущенную плотность каждого сорта зарядов и подставляя результат в уравнение электронейтральности ($n_e = n_i$), приходим к уравнению

$$4\pi (p'_i + p'_e) + B'_z B_0 = 0. \quad (16.5)$$

Подставляя в уравнение Максвелла

$$(\text{rot } \mathbf{B})_{\perp} = 4\pi \mathbf{j}_{\perp} / c \quad (16.6)$$

ток \mathbf{j}_{\perp} , вычисленный с помощью (7.53), приходим к тому же самому соотношению (16.5). Это означает, что число независимых уравнений меньше числа входящих в них независимых переменных. Это обстоятельство, как будет видно из дальнейшего, однако, не приводит к парадоксу.

Исключая из (16.4) или (16.5) B'_z , приходим к следующей системе трех уравнений для трех переменных X, Y, Z :

$$\left. \begin{aligned} \omega \frac{T_i}{T_e} X + \frac{5}{3} \Omega_i Z &= 0; \\ \left[\omega \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) - \frac{10}{3} \Omega_i \right] X + \left(\kappa_p - \frac{5}{3} \kappa_B \right) Y &= 0; \\ \Omega_i X + (\kappa_B - \kappa_n) Y - \omega Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X &= \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^{-1} \left(\frac{p'_i}{\rho_{oi}} - \frac{p'_e}{\rho_{oe}} \right); \\ Y &= \frac{\omega}{\kappa_p} \frac{p'_i + p'_e}{\rho_{oi} + \rho_{oe}} + i \frac{cE_y}{B_0}; \\ Z &= \frac{n'}{n_0} - \frac{\kappa_n}{\kappa_p} \frac{p'_i + p'_e}{\rho_{oi} + \rho_{oe}}. \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

Приравняв нулю определитель системы (16.7), получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \omega^2 + \frac{5}{3} \omega \left(1 - \frac{T_{oe}}{T_{oi}} \right) \Omega_i \frac{\kappa_B - \kappa_n}{\kappa_p - (5/3) \kappa_B} + \\ + \frac{5}{3} \Omega_i \frac{T_{oe}}{T_{oi}} \left[1 + \frac{10}{3} \frac{\kappa_B - \kappa_n}{\kappa_p - (5/3) \kappa_B} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (16.9)$$

При $T_{oi} = T_{oe}$ отсюда следует критерий неустойчивости

$$\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} > \frac{7}{3} + \frac{\beta_e + \beta_i}{4}. \quad (16.10)$$

При $\beta \ll 1$ это означает, что плазма неустойчива, если

$$\eta > 7/3 \text{ либо } \eta < -1. \quad (16.11)$$

Инкремент возмущений порядка

$$\gamma \approx \Omega. \quad (16.12)$$

Видно, что столкновительная плазма, так же как и бесстолкновительная, неустойчива, если температура изменяется более быстро, чем плотность, и если класс возмущений с очень малым или нулевым k_z допустим (чего может и не быть, например, при наличии шира).

§ 16.3. Инерционные (альфвеновские) волны

Ограничимся рассмотрением случая плазмы с $\nabla T = 0$. При этом можно исходить из гидродинамических уравнений типа Брагинского (см. § 7.4), поскольку в тензор вязкости не входят производные от теплового потока. Нам необходимо знать только компоненты с ин-

дексами $(i, k) = (x, y)$. Как в пренебрежении непотенциальностью \mathbf{E} и неоднородностью \mathbf{B} , так и при учете этих факторов, указанные компоненты π_{ik} имеют вид (7.67).

Итак, исходим из уравнений непрерывности и движения каждого сорта зарядов, выражения для полного тензора вязкости, условия электронейтральности и уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) &= 0; \\ mnd\mathbf{V}/dt &= -T\nabla n + en\mathbf{E} + en[\mathbf{V}\mathbf{B}]/c - \operatorname{div}\pi; \\ \pi_{yy} = -\pi_{xx} &= \frac{p}{2\omega_B} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right); \\ \pi_{xy} = \pi_{yx} &= \frac{p}{2\omega_B} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right); \\ n_e = n_i &\equiv n; \operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c; \\ \mathbf{j} &= e_in_i(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e). \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

Предполагается, что в электронном уравнении движения члены с инерцией и тензором вязкости отсутствуют.

Исследуем возмущения с $k_z=0$. Сложим уравнения движения для ионов и электронов и возьмем z -ю проекцию ротора этой суммы. Тогда, учитывая уравнения Максвелла, получаем

$$\operatorname{rot}_z(m_in_d\mathbf{V}^{(i)}/dt + \nabla\pi^{(i)}) = 0. \quad (16.14)$$

Так как это уравнение содержит члены, малые как ω/ω_{Bi} и $(kr_i)^2$, то скорость ионов сюда можно подставлять в нулевом приближении по этим параметрам, т. е. в виде

$$\mathbf{V}^{(i)} = \frac{1}{m_i\omega_{Bi}} \left[\mathbf{e}_z, \frac{T\nabla n}{n} - e_i\mathbf{E} \right]. \quad (16.15)$$

При использовании уравнения (16.14) в уравнении непрерывности для ионов малыми членами можно пренебречь. Тогда в линейном приближении из ионного и электронного уравнений непрерывности будут следовать первое уравнение системы (16.4) (ср. $p' = n'T_0$) и уравнение баланса давлений (16.5).

В случае безынерционных возмущений (см. § 16.2) система уравнений для возмущенных величин сводилась

к уравнениям для X, Y, Z . Поэтому теперь можно принять $X=Y=Z=0$. Для таких возмущений, согласно (16.38) и $Y=0$,

$$cE_y/B_0 = i\omega n'/\kappa_n n_0. \quad (16.16)$$

Используя это соотношение и (16.5), с помощью (16.7) находим, что в интересующих нас возмущениях плазма ведет себя как несжимаемая жидкость:

$$\operatorname{div}\mathbf{V}^{(i)} = 0. \quad (16.17)$$

Учитывая это при вычислении $\operatorname{div}\pi^{(i)}$, приводим (16.14) к виду

$$\operatorname{rot}_z \{ nm_i [\partial\mathbf{V}^{(i)}/\partial t + (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_M^{(i)}) \nabla\mathbf{V}^{(i)}] \} = 0, \quad (16.18)$$

где $\mathbf{V}_E^{(i)} \equiv c[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]/B$; $\mathbf{V}_M^{(i)} = (cT_i/e_i B)[\mathbf{e}_z, \nabla \ln B]$

— скорости электрического и магнитного дрейфов.

Проводя здесь линеаризацию и переходя к квазиклассическому приближению, получаем локальное дисперсионное уравнение

$$(\omega - \omega_{ni})(\omega - \Omega_i) = 0, \quad (16.19)$$

совпадающее с (15.16) при учете принятых выше предположений $\nabla T=0$ и $k_z=0$. Как и в случае бесстолкновительной плазмы, к которому относится (15.16), рассмотренные здесь возмущения столкновительной плазмы не раскачиваются, $\gamma=0$.

Заметим также, что при учете $\nabla T \neq 0$ для инерционных возмущений столкновительной плазмы получается точно такое же дисперсионное уравнение, как и в случае бесстолкновительной плазмы [см. уравнение (15.16)]. Это показано в приложении 4 к настоящей главе.

§ 16.4. Неустойчивости плазмы конечного давления при конечной электронной теплопроводности

В отличие от § 16.2, здесь считаем $k_z \neq 0$ и учитываем конечную теплопроводность электронов, так что уравнение баланса тепла электронов принимаем в виде

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + \mathbf{V}_e \nabla p_e + \gamma_0 p_e \operatorname{div}\mathbf{V}_e + (\gamma_0 - 1) \operatorname{div}\mathbf{q}_e = 0, \quad (16.20)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$;

$$\mathbf{q}_e = -3,16 \frac{\rho_e}{m_e v_e} \nabla_{\parallel} T_e + \frac{5}{2} \frac{\rho_e}{m_e \omega_{Be}} [\mathbf{h}, \nabla T_e]; \quad \gamma_0 = 5/3. \quad (16.21)$$

Продольным движением ионов пренебрегаем, $V_{zi} = 0$. С учетом этого уравнение движения электронов записывается в виде

$$n e_e (\mathbf{E} + [\mathbf{V}_e, \mathbf{B}' + \mathbf{B}_0]/c) - \nabla p_e + \mathbf{R}_e = 0, \quad (16.22)$$

где

$$\mathbf{R}_e = -s n_e \nabla T_e - v_e m_e V_{ze} \mathbf{e}_z; \quad s = 0,71. \quad (16.23)$$

Если линеаризовать z -проекцию уравнения (16.22) и выразить в нем B'_x через V'_{ze} посредством вытекающего из уравнения Максвелла $\text{rot}_z \mathbf{B}' = (4\pi/c) e_e n_0 V'_{ze}$ соотношения

$$B'_x = i 4\pi k_y e_e n_0 V'_{ze} / c k_{\perp}^2, \quad (16.24)$$

то получится, что V'_{ze} пропорционален малому параметру $\sim (c k_{\perp} / \omega_{pe})^2$, ср. с § 14.5. Поэтому в уравнениях непрерывности и баланса тепла электронов членами с V_{ze} можно пренебречь. Магнитное поле B'_x , как видно из (16.24), такого малого параметра не содержит и потому должно учитываться. Используя уравнение (16.22), это поле можно выразить через возмущения электрического поля E'_y и возмущения плотности и давления электронов:

$$B'_x = i k_z B_0 (\omega_{Ti} / \kappa_T) [\omega + \omega_{pi}^* (1 + s) - s \omega_{ni}]^{-1} \times \\ \times \left[\frac{ic E'_y}{B_0} \frac{\kappa_T}{\omega_{Ti}} - \frac{\rho'_e}{\rho_{0e}} (1 + s) + s \frac{n'}{n_0} \right]. \quad (16.25)$$

С учетом этого линеаризованное уравнение непрерывности электронов остается таким же, как и при $k_z = 0$ [см. (16.4)], а уравнение баланса тепла электронов принимает вид [ср. с (16.4)]

$$-i \frac{\rho'_e}{\rho_{0e}} \left(\omega - 2\gamma_0 \Omega_e + i\Delta \frac{\omega + \omega_{ni}}{\bar{\omega}} \right) - \\ - i \frac{n'}{n_0} \left(\gamma_0 \Omega_e - i\Delta \frac{\omega + \omega_{pi}^*}{\bar{\omega}} \right) + \frac{c E'_y}{B_0} \left(\kappa_p - \gamma_0 \kappa_B + i\Delta \frac{\kappa_T}{\bar{\omega}} \right) +$$

$$+ i\gamma_0 \frac{B'_z}{B_0} (\omega - 2\omega_{pe}^* + \omega_{ne}) = 0, \quad (16.26)$$

где $\Delta = (2/3) 3,16 k_z^2 T_0 / m_e v_e$; $\bar{\omega} = \omega + \omega_{pi}^* (1 + s) - s \omega_{ni}$.

Вводя переменные X, Y, Z , определенные соотношением (16.8), приходим к системе трех уравнений, аналогичных (16.7):

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i X + (\kappa_B - \kappa_n) Y - \omega Z &= 0; \\ X \left[\omega + \frac{i\Delta}{2\bar{\omega}} (\omega + \omega_{ni}) \right] - iY \frac{\Delta}{2\bar{\omega}} \kappa_T + \\ + Z \left[\gamma_0 \Omega_i + \frac{i\Delta}{2\bar{\omega}} (\omega + \omega_{pi}^*) \right] &= 0; \\ X (\omega - 2\gamma_0 \Omega_i) + Y (\kappa_p - \gamma_0 \kappa_B) + \gamma_0 \Omega_i Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.27)$$

Отсюда следует дисперсионное уравнение

$$\left(1 + \frac{\gamma_0 \beta}{2} \right) \left\{ x^2 + \gamma_0 \frac{\beta^2 y^2}{4} \left[1 - \frac{2\gamma_0 [1 + (1/2) y\beta]}{y + \gamma_0 \beta/2} \right] \right\} \times \\ \times [x + y(1 + s) - s] + i\alpha \left\{ x^2 \left(1 + \frac{2}{5} \gamma_0 \beta \right) + \right. \\ \left. + x \left[1 + \frac{\gamma_0 \beta}{2} + \frac{y\gamma_0 \beta}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_0 \beta}{4} \left(1 + 2y + \beta y^2 - \frac{y^2}{\gamma_0} \right) \right\} = 0, \quad (16.28)$$

где $x = \omega / \omega_{ni}$; $y = \kappa_p / \kappa_n$; $\alpha = \Delta / \omega_{ni}$.

При $\alpha = 0$ ($k_z = 0$) уравнение (16.28) распадается на два, одно из которых представляет собой уравнение (16.9) и соответствует возмущениям с $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$, а второе имеет вид

$$\omega = \omega_{ne} + \omega_{Te} (1 + s) \quad (16.29)$$

и соответствует возмущениям с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$.

Рассмотрим (16.28) при $\alpha \neq 0$, полагая $\nabla T_0 = 0$. В этом случае (16.28) также распадается на два уравнения. Одно из них

$$\omega = \omega_{ne} \quad (16.30)$$

описывает устойчивые колебания, а другое

$$(1 + \gamma_0 \beta / 2) \{ \omega^2 + \gamma_0 \Omega_i^2 [1 - 2\gamma_0 (1 + \beta/2) / (1 + \gamma_0 \beta / 2)] \} + i\Delta [\omega (1 + 2\beta/3) - 2\Omega_i (1 + 5\beta/12)] = 0 \quad (16.31)$$

при не слишком большом β , $\beta < \beta_{\text{гран}}$ имеет решение с $\text{Im} \omega > 0$, соответствующее неустойчивости. Покажем это.

В случае $\beta \ll 1$ уравнение (16.31) упрощается:

$$\omega^2 - (35/9) \Omega_i^2 + i\Delta (\omega - 2\Omega_i) = 0. \quad (16.32)$$

При малых k_z , когда $\Delta / \Omega_i \ll 1$, отсюда следует

$$\text{Re} \omega = \pm \sqrt{35} \Omega_i / 3; \quad \text{Im} \omega = -(1/2) \Delta (1 \pm 6/\sqrt{35}). \quad (16.33)$$

Видно, что один из корней имеет положительную мнимую часть $\text{Im} \omega > 0$. Инкремент численно мал, $\text{Im} \omega \approx \Delta / 144$.

При больших k_z , $\Delta \gg \Omega_i$, из (16.32) следует, что нарастающие во времени возмущения имеют частоту и инкремент

$$\text{Re} \omega = 2\Omega_i; \quad \text{Im} \omega = \Omega_i^2 / 9\Delta. \quad (16.34)$$

Неустойчивость, описываемая уравнением (16.31), не развивается при слишком больших β . Приравняв нулю вещественную и мнимую часть уравнения (16.31) при $\text{Im} \omega = 0$, находим границу неустойчивости

$$\beta = \beta_{\text{гран}} = 1, 2. \quad (16.35)$$

При $\beta > \beta_{\text{гран}}$ плазма устойчива.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что плазма с $\nabla T_0 = 0$ и конечным β неустойчива. Неустойчивость обязана тому, что в плазме с конечным, хотя и малым β существует ветвь очень медленных колебаний:

$$\omega / k_y \approx (cT_0 / eB_0) \partial \ln B_0 / \partial x \quad (16.36)$$

(магнитно-дрейфовых), которые раскачиваются вследствие отрицательной диссипации, обусловленной конечной электронной теплопроводностью. Продольное волновое число этой неустойчивости порядка

$$k_z v_{Te} \approx (v_e \omega_{pe} \beta)^{1/2}, \quad (16.37)$$

а максимальный инкремент численно мал по сравнению с частотой:

$$\text{Im} \omega \approx 0, 1 \text{ Re} \omega \approx 0, 1 \beta (k_y c T_0 / e B_0) \partial \ln n_0 / \partial x. \quad (16.38)$$

Интересно отметить, что раскачиваемые ветви колебаний существенно связаны с возмущениями температуры, тогда как наличие градиента стационарной температуры не обязательно.

§ 16.5. Неустойчивости при $k_z \approx \omega_* / v_{Ti}$

В § 16.2, 16.3 полагалось $k_z = 0$, а в § 16.4 — $k_z v_{Ti} \rightarrow 0$. Теперь рассмотрим возмущения с $\omega \approx k_z v_{Ti}$. Как было показано в гл. 8, при $\beta = 0$ с такими возмущениями связана градиентно-температурная неустойчивость.

Полагаем $\omega \gg (m_e / m_i) v_e$. При этом условии в уравнении теплового баланса электронов определяющим является поток тепла из-за теплопроводности вдоль силовых линий, а в уравнении теплового баланса ионов — поток тепла из-за «дрейфовой» теплопроводности. Кроме того, при $\omega \gg (m_e / m_i) v_e$ не важен теплообмен между электронами и ионами.

С учетом этих замечаний описываем поведение плазмы следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \partial n / \partial t + \text{div} (n \mathbf{V}) &= 0; \\ m n d \mathbf{V} / dt &= -\nabla p - \nabla \pi + en (\mathbf{E} + [\mathbf{V}, \mathbf{B}] / c); \\ d p_i / dt + \gamma_0 p_i \text{div} \mathbf{V}_i + (\gamma_0 - 1) \text{div} \mathbf{q}_i &= 0; \\ \nabla_{\parallel} T_e \equiv \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla T_e) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.39)$$

где $\mathbf{q} = (5/2) (p c / e B) [\mathbf{h}, \nabla T]$; $\gamma_0 = 5/3$, $\mathbf{h} = \mathbf{B} / B$.

Необходимые нам элементы тензора ионной вязкости π_{xx} , π_{xy} , π_{yx} , π_{yy} имеют вид, аналогичный (16.11), но с заменой $\partial V_{\alpha} / \partial x_{\beta} \rightarrow \partial V_{\alpha} / \partial x_{\beta} + (2/5p) \partial q_{\alpha} / \partial x_{\beta}$, а элементы π_{xz} , π_{yz} имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xz} &= -\frac{p}{\omega_B} \left[\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{2}{5p} \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right) \right]; \\ \pi_{yz} &= \frac{p}{\omega_B} \left[\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{2}{5p} \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (16.40)$$

При линеаризации уравнений (15.39) учитываем малость ω/ω_{Bi} и $(k_{\perp} \rho_i)^2$. В нулевом приближении по этим параметрам

$$\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_{\perp}^{(0)} \equiv [\mathbf{h}, \nabla p/n - e\mathbf{E}]/m\omega_B, \quad (16.41)$$

тогда как в следующем $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_{\perp}^{(0)} + \delta\mathbf{V}_{\perp}$, где

$$\delta\mathbf{V}_{\perp} = [\mathbf{e}_z, mnd\mathbf{V}^{(0)}/dt + \nabla \overleftrightarrow{\pi}]/m\omega_B n. \quad (16.42)$$

Подставляем эти выражения в уравнения непрерывности, в уравнение баланса тепла ионов, в z -проецию уравнений движения и в уравнение баланса тепла электронов. В результате получаем систему уравнений, аналогичную (16.4):

$$\left. \begin{aligned} & -\omega n'/n_0 + \Omega \rho'/\rho_0 - i(\kappa_n - \kappa_B) cE_y/B_0 + \\ & + (\omega - \omega_p^*) B'_z/B_0 + k_z V'_z + \text{div } \delta\mathbf{V}_{\perp} = 0; \\ & (\omega - 2\gamma_0 \Omega_i) \rho'_i/\rho_0 + \gamma_0 \Omega_i n'/n_0 + i(\kappa_p - \gamma_0 \kappa_B) \times \\ & \times cE_y/B_0 - \gamma_0 (\omega - 2\omega_{pi}^* + \omega_{ni}) B'_z/B_0 - \\ & - \gamma_0 k_z V'_{zi} = 0; \\ & m(\omega - \Omega) V'_z/T_0 = k_z \rho'/\rho_0 + i(\kappa_p/\omega_p^*) \times \\ & \times [k_z cE_y/B_0 + (\omega - \omega_p^*) B'_z/B_0]; \\ & T'_e/T_0 = i\kappa_T B'_x/k_z B_0; \quad \rho_0 = \rho_{0\alpha}; \quad \alpha = e, i. \end{aligned} \right\} \quad (16.43)$$

Сложив уравнения движения для ионов и электронов и взяв z -проецию ротора этой суммы, с учетом уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c$ получаем аналогично (16.14):

$$\begin{aligned} & \text{rot}_z (m_i n_0 d\mathbf{V}^{(i)}/dt + \nabla \overleftrightarrow{\pi}^{(i)}) = \\ & = (\rho_0/\omega_{Bi}) k_{\perp}^2 k_z c_A^2 (\kappa_p/\omega_{pi}^*) B'_x/B_0. \end{aligned} \quad (16.44)$$

Кроме того, находим, что при $k_z = 0$ остается в силе уравнение (16.5) — оно получается, если из уравнения непрерывности ионов вычесть уравнение непрерывности электронов.

Оценив по порядку величины члены в уравнениях непрерывности и z -проекции уравнения Максвелла

$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c$, находим, что с точностью до членов порядка ω/ω_{Bi}

$$V_z^{(i)} = V_z^{(e)} \equiv V_z. \quad (16.45)$$

Из двух последних уравнений системы (16.43) с учетом (16.5) следует:

$$\left. \begin{aligned} & \rho'_e/\rho_0 = i\kappa_T B'_x/k_z B_0 + n'/n_0; \\ & \rho'_i/\rho_0 = i(2\kappa_p - \kappa_T) B'_x/k_z B_0 - n'/n_0 - 4b/\beta; \\ & icE_y/B_0 = -i(\omega + \omega_{ni}) B'_x/k_z B_0 + \omega_{pi}^* n'/\kappa_p n_0; \\ & k_z V_z = -k_z^2 c_A^2 b/(\omega - \Omega_i), \end{aligned} \right\} \quad (16.46)$$

где

$$b \equiv i\kappa_B B'_x/k_z B_0 + B'_z/B_0. \quad (16.47)$$

Из уравнения (16.44) после подстановки в него выражений для $\overleftrightarrow{\pi}^{(i)}$ и $d\mathbf{V}^{(i)}/dt$ получаем

$$\begin{aligned} & (\omega - 3\Omega_i) \rho'_i/\rho_0 + (3/2) \Omega_i n'/n_0 + (-\omega/2 + \omega_{pi}^* - \\ & - \omega_{ni}/2) B'_z/B_0 + i(\kappa_p/\omega_{pi}^*) [\omega - (3/2) \Omega_i] cE_y/B_0 = \\ & = -ik_z c_A^2 (\kappa_p/\omega_{pi}^*) B'_x/B_0. \end{aligned} \quad (16.48)$$

Из уравнения непрерывности электронов [первое уравнение системы (16.43)] с учетом (16.45), (16.46) находим

$$\frac{n'}{n_0} = i \frac{\kappa_n}{k_z} \frac{B'_x}{B_0} + \frac{b}{\omega + \omega_{ni}} \left(\omega + \omega_{pi}^* - \frac{k_z^2 c_A^2}{\omega - \Omega_i} \right). \quad (16.49)$$

Используя соотношения (16.46), (16.49), выразим в уравнении баланса тепла ионов [второе уравнение системы (16.43)] и в инерционном уравнении (16.48) переменные ρ'_i , n' , E_y , B'_z , V_z через B'_x и b . В результате получаются два уравнения для двух неизвестных B'_x и b . При этом оказывается, что в уравнении баланса тепла ионов член с B'_x отсутствует, и оно имеет вид

$$D_1 b = 0, \quad (16.50)$$

где D_1 означает

$$D_1 = x^2(x + \beta/2)(1 + 2\beta/3) + x(x + \beta/2)[(1 + 5\beta/6)y +$$

$$+ 5\beta/6 + 5\beta^2/12 + (5\beta/12)(x + \beta/2)(y^2 + 2y + \beta - 3/5) - \alpha(8x/3 + 5y/3 + 5\beta/3 - 1) = 0. \quad (16.51)$$

Здесь $x = \omega/\omega_{pi}^*$; $y = (1 + \eta)^{-1}$; $\alpha = k_z^2 T_0/m_i \omega_{pi}^{*2}$.

Из (16.50) следует, что возмущениям с $b \neq 0$ соответствует дисперсионное уравнение

$$D_1 = 0. \quad (16.52)$$

В этом случае инерционное уравнение даст связь между B'_x и b . Если же $D_1 \neq 0$, то $b = 0$. При этом инерционное уравнение сводится к виду

$$D_2 B'_x = 0, \quad (16.53)$$

где

$$D_2 = \omega^2 - \omega(\Omega_i + \omega_{pi}^*) + \Omega_i(\omega_{pi}^* + \omega_{Ti}) - k_z^2 c_A^2. \quad (16.54)$$

При $B'_x \neq 0$ из (16.53) вытекает дисперсионное уравнение

$$D_2 = 0, \quad (16.55)$$

совпадающее с дисперсионным уравнением для инерционных (альфвеновских) волн в бесстолкновительной плазме. Оно представляет собой обобщение дисперсионного уравнения (16.17) на случай $\nabla T \neq 0$ и $k_z \neq 0$.

Дисперсионное уравнение (16.52) является аналогом уравнения энтропийных волн (16.9). Оно описывает безыперционные волны с $k_z \neq 0$.

Следует иметь в виду, что дисперсионное уравнение (16.52) не допускает предельного перехода к случаю $k_z = 0$, поскольку при его получении использовалось уравнение баланса тепла электронов $\nabla_\parallel T_e = 0$, соответствующее бесконечной электронной теплопроводности.

Уравнение $D_2 = 0$ анализировалось в гл. 15. Поэтому ниже остановимся только на анализе уравнения $D_1 = 0$.

При $\beta \rightarrow 0$ уравнение $D_1 = 0$ означает

$$x^3 + x^2/(1 + \eta) - \alpha[8x/3 + (2/3 - \eta)/(1 + \eta)] = 0. \quad (16.56)$$

Это уравнение исследовалось в гл. 8, где было показано, что описываемые им возмущения нарастают во времени при

$$\eta > 2/3 \text{ или } \eta < -2. \quad (16.57)$$

При конечных β уравнение (16.52) анализировалось численно Л. В. Михайловской, а затем В. И. Лапшиным и В. В. Немовым. Результаты этого анализа представлены на рис. 16.1.

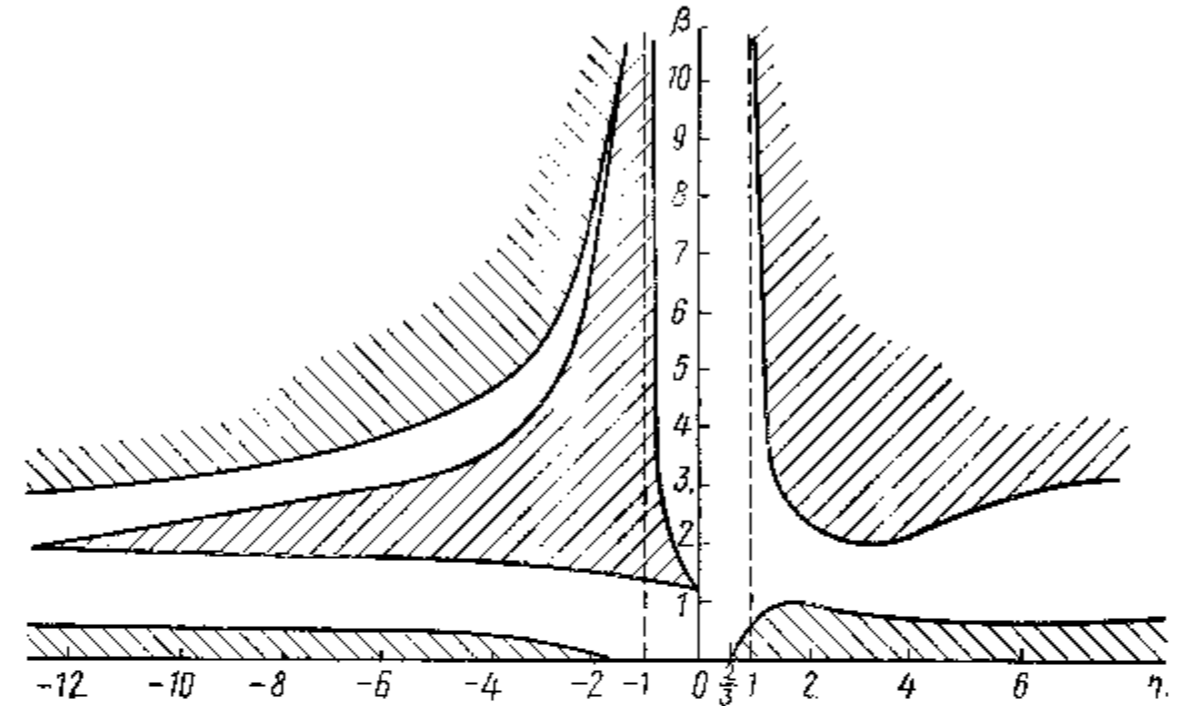


Рис. 16.1. Области неустойчивости (заштриховано) неоднородной столкновительной плазмы на плоскости $\eta = d \ln T / d \ln n_0$ и $\beta = 16 \pi n_0 T / B_0^2$. [Учтены лишь неустойчивости, описываемые уравнением (16.52)]

§ 16.6. Желобковая неустойчивость плазмы конечного давления

В § 16.3 мы обсуждали инерционные возмущения плазмы конечного давления при $g = 0$, а в § 9.1, 14.10 — желобковую неустойчивость плазмы низкого давления. Опираясь на полученные там результаты, можно заключить, что исследование желобковой неустойчивости плазмы конечного давления должно сводиться к рассмотрению влияния силы тяжести на инерционные волны (волны альфвеновского типа).

Инерционные волны имеют относительно простую макроскопическую трактовку: при $\nabla T = 0$ они описываются системой уравнений (16.13), справедливой как в случае столкновительной, так и в случае бесстолкновительной плазмы. При $g = 0$ в правую часть полного урав-

нения движения должен быть добавлен член $m_i n g$, а в выражении (16.15) для ионной скорости следует сделать замену $e_i \mathbf{E} \rightarrow e_i \mathbf{E} + m g$. Способом, аналогичным § 16.3, исходную систему уравнений можно свести к следующей:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_z \{ n m_i [\partial \mathbf{V}_i / \partial t + (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_M^{(i)}) \cdot \nabla \mathbf{V}^{(i)}] - \\ - m_i [\nabla n, \mathbf{g}]_z = 0; \\ \text{div } \mathbf{V}^{(i)} = 0; \quad \mathbf{V}^{(i)} = [e_z, T_i \nabla n / n - e_i \mathbf{E} - \\ - m_i \mathbf{g}] / m_i \omega_{Bi}; \\ \nabla (B^2 / 8\pi + p) = 0; \\ \partial n / \partial t + \text{div} (n \mathbf{V}^{(e)}) = 0; \\ \mathbf{V}^{(e)} = [e_z, T_e \nabla n / n - e_e \mathbf{E}] / m_e \omega_{Be}. \end{aligned} \right\} \quad (16.58)$$

Предполагается, что $\partial / \partial t \gg \mathbf{V}_g^{(i)} \cdot \nabla$, где $\mathbf{V}_g^{(i)} \equiv [\mathbf{g}, e_z] / \omega_{Bi}$.

1. Мелкомасштабные возмущения. Пусть $\nabla n_0 \parallel \mathbf{x}$, $\mathbf{g} \parallel \mathbf{x}$. Тогда из (16.58) при $k_\perp a \gg 1$ вытекает локальное дисперсионное уравнение

$$(\omega - \omega_{ni})(\omega - \Omega_i) - g k_y^2 / k_\perp^2 = 0. \quad (16.59)$$

Этот же результат можно получить с помощью общего дисперсионного уравнения (13.16), если в резонансных знаменателях у ионных $\epsilon_{\alpha\beta}$ сделать замену $\omega \rightarrow \omega + g k_y / \omega_{Bi}$.

Из (16.59) следует, что при $(\omega_{ni}, \Omega_i) \ll \sqrt{gk}$, т. е. в приближении нулевого ларморовского радиуса ионов, дисперсионное уравнение желобковых возмущений плазмы с конечным β имеет такой же вид, как и при $\beta \ll 1$ [ср. (16.59) с (9.7)]. Если при этом $gk < 0$, то имеет место желобковая неустойчивость с инкрементом (9.8).

При $(\omega_{ni}, \Omega_i) \geq \sqrt{|gk|}$ имеет место эффект стабилизации. В случае конечных β он проявляется при условии [ср. с (9.30)]

$$\omega_{ni}^2 (1 + \beta/2)^2 > 4 |gk|. \quad (16.60)$$

Видно, что при конечных β эффект стабилизации конечного ларморовского радиуса действует несколько сильнее, чем при $\beta \ll 1$.

2. Крупномасштабные возмущения. Пусть плазма обладает цилиндрической симметрией. Примем координатно-временную зависимость се возмущений в виде $f(r) \exp(i l \varphi - i \omega t)$. Из (16.58) для таких возмущений получается следующее дифференциальное уравнение [ср. с (9.38)]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 Q n_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \left[(1 - l^2) Q n_0 + (l^2 g + r \omega^2) \frac{\partial n_0}{\partial r} \right] \Phi = 0. \quad (16.61)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} Q &= \omega^2 - \omega \omega_{ni} (1 - \beta/2) - \omega_{ni}^2 \beta/2; \\ \Phi &= E'_\varphi / B_0; \\ \omega_{ni} &= (l/r) (\partial \ln n_0 / \partial r) T_i / m_i \omega_{Bi}. \end{aligned} \right\} \quad (16.62)$$

При $\omega \gg \omega_{ni}$ уравнение (16.6) не содержит стабилизирующих членов и в этом предельном случае описывает желобковую неустойчивость. Рассмотрим теперь обратный предельный случай $\omega \ll \omega_{ni}$. С помощью интегрального соотношения типа (9.36) можно установить, что все моды с $l \neq 1$ будут устойчивы. Если же $l = 1$, то (16.61) сведется к следующему:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 Q n_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial n_0}{\partial r} (g + r \omega^2) \Phi = 0. \quad (16.63)$$

При больших ω_{ni} параметр Q является большим, и приближенное решение (16.63) есть [ср. с (9.39)]:

$$\Phi \equiv E'_\varphi / B_0 = \text{const}. \quad (16.64)$$

Уравнение для частоты совпадает с (9.40). Этот результат означает, что, как и в случае $\beta \ll 1$, возмущения первой моды плазмы с $\beta \approx 1$ раскачиваются в условиях, когда все остальные возмущения стабилизированы.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛ. 16

Приложение 1. Уравнения переноса для столкновительной плазмы конечного давления

Достаточно частые столкновения между частицами приводят к распределению по скоростям, близкому к максвелловскому, т. е.

$$f = f_0 (1 + \Phi), \quad (\text{П. 16.1})$$

где

$$f_0 = n (m/2\pi T)^{3/2} \exp[-m(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2/2T], \quad (\text{П.16.2})$$

а Φ — мало, $\Phi \ll 1$. Величины n , \mathbf{V} , T означают плотность, среднюю скорость и температуру соответствующей компоненты плазмы, если Φ удовлетворяет условиям

$$\int (\mathbf{v} - \mathbf{V})^k f_0 \Phi d\mathbf{v} = 0, \quad k = 0, 1, 2. \quad (\text{П.16.3})$$

Как функция вектора «хаотической» скорости $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ величина Φ может быть представлена в виде суммы скалярной, векторной и тензорной частей:

$$\Phi = \Phi_0 + \omega_i \Phi_i + (\omega_i \omega_k - \delta_{ik} \omega^2/3) \Phi_{ik} + \dots \quad (\text{П.16.4})$$

Многоточие в правой части равенства соответствует тензорам третьего и более высоких порядков.

Общее выражение для скалярной части Φ_0 , удовлетворяющее первому и третьему условиям (П.16.3), может быть записано в виде ряда по полиномам Сонина — Лагерра $L_l^{(1/2)}(x)$, $x \equiv m\omega^2/2T$, начинающегося с $l=2$:

$$\Phi_0 = \sum_{l=2}^{\infty} a^{(l)} L_l^{(1/2)}(x). \quad (\text{П.16.5})$$

Аналогично векторная часть Φ_i удовлетворяет второму условию (П.16.3) при

$$\Phi_i = \sum_{l=1}^{\infty} a_i^{(l)} L_l^{(3/2)}(x). \quad (\text{П.16.6})$$

Поскольку на тензорную часть Φ_{ik} мы не наложили никаких ограничений, то она может быть записана в виде полного ряда:

$$\Phi_{ik} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{ik}^{(l)} L_l^{(5/2)}(x). \quad (\text{П.16.7})$$

В виде рядов такого же типа могут быть представлены и тензорные функции высших порядков, опущенные в правой части равенства (П.16.4).

Коэффициенты $a^{(l)}$, $a_i^{(l)}$, $a_{ik}^{(l)}$ — это высшие моменты функции распределения. Наиболее простой смысл имеют величины $a_i^{(1)}$ и $a_{ik}^{(0)}$. Они связаны с потоком тепла \mathbf{q} и тензором вязкости π соотношениями

$$a_i^{(1)} = - (5/2) (m/\rho T) q_i; \quad (\text{П.16.8})$$

$$a_{ik}^{(0)} = (1/2) (m/\rho T) \pi_{ik}. \quad (\text{П.16.9})$$

В этом можно убедиться, используя уравнения (П.16.1), (П.16.6), (П.16.7) и определенное \mathbf{q} и π :

$$\mathbf{q} = (m/2) \int \mathbf{w}^3 f d\mathbf{v}; \quad (\text{П.16.10})$$

$$\pi_{\lambda\mu} = m \int (\omega_\lambda \omega_\mu - \delta_{\lambda\mu} \omega^2/3) f d\mathbf{v}. \quad (\text{П.16.11})$$

Учитывая (П.16.8), (П.16.9), введем также величины \mathbf{q}^* , π^* , определенные соотношениями

$$a_i^{(2)} = - (2/5) (m/\rho T) q_i^*; \quad (\text{П.16.12})$$

$$a_{ik}^{(1)} = (1/2) (m/\rho T) \pi_{ik}^*. \quad (\text{П.16.13})$$

Используя кинетическое уравнение Больцмана

$$\partial f / \partial t + \mathbf{v} \nabla f + (e/m) (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]/c) \partial f / \partial \mathbf{v} = C, \quad (\text{П.16.14})$$

можно получить цепочку уравнений, связывающих величины n , \mathbf{V} , T , $a^{(l)}$, $a_i^{(l)}$, $a_{ik}^{(l)}$ и т.д. Эта цепочка может быть оборвана различными способами: пренебрежем величинами с достаточно большим номером l и достаточно большим числом тензорных индексов. Различные способы обрыва цепочки уравнений приводят к замкнутой системе уравнений той или иной степени точности, пригодных для описания того или иного круга явлений. Примеры таких систем уравнений приводились в гл. 7, где, в частности, отмечалась система уравнений, пригодная для исследования потенциальных градиентных неустойчивостей плазмы нулевого давления, а также система уравнений, полученная в свое время С. И. Брагинским.

Как отмечалось в гл. 7, в теории градиентных неустойчивостей поперечная скорость \mathbf{V}_\perp должна считаться величиной того же по-

рядка, что и старшие члены в потоке тепла \mathbf{q} и тензора вязкости π . Поэтому при построении замкнутой системы уравнений, включающей

уравнение для \mathbf{V} , величины \mathbf{q} и π следует считать столь же важными, как и \mathbf{V} . Если отличными от нуля считаются только вели-

чины n , \mathbf{V} , T , π , \mathbf{q} , то получающаяся при этом система уравнений соответствует так называемому приближению Грэда, для плазмы в магнитном поле она была выведена Херданом и Лили. Эта система уравнений менее точна, чем уравнения, выведенные С. И. Брагинским. Чтобы получить правильный предельный переход к резуль-

татам С. И. Брагинского, необходимо учесть не только π и \mathbf{q} (т. е. $a_{ik}^{(0)}$, $a_i^{(1)}$), но также и $a_{ik}^{(1)}$, $a_i^{(2)}$. Это означает, что в выражениях (П.16.6), (П.16.7) для Φ_i и Φ_{ik} необходимо учитывать по два члена ряда (приближение двух полиномов).

Чтобы определить, достаточно ли этой точности для исследования градиентных неустойчивостей плазмы конечного давления, необходимо оценить также роль членов скалярной части Φ_0 [см. урав-

нение (П.16.5)] и тензорных членов третьего и более высоких порядков. При этом оказывается, что необходим учет Φ_0 . Чтобы количественно правильно описать эффекты, связанные с Φ_0 , необходимо рассматривать выражение (П.16.5) в приближении двух полиномов. В результате приходим к выводу, что наша задача сводится к конструированию 15 уравнений для n , V , T , $a_{ik}^{(0)}$, $a_{ik}^{(1)}$, $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$.

Первые три уравнения этой системы, получающиеся при интегрировании уравнений (П.16.14) с весами 1, v , $(v-V)^2$ имеют хорошо известный вид:

$$\partial n / \partial t + \text{div}(nV) = 0; \quad (\text{П.16.15})$$

$$mndV/dt = -\nabla p - \nabla \overleftrightarrow{\pi} + en(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]/c) + \mathbf{R}; \quad (\text{П.16.16})$$

$$(3/2) dp/dt + (5/2) p \text{div} V = -\text{div} \mathbf{q} - (\overleftrightarrow{\pi} \cdot \nabla) V + Q. \quad (\text{П.16.17})$$

Здесь \mathbf{R} — сила трения:

$$\mathbf{R} = m \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}) C dv, \quad (\text{П.16.18})$$

а Q — передача тепла:

$$Q = (m/2) \int (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 C dv. \quad (\text{П.16.19})$$

В приближении $v_i \gg (d/dt, \text{div} V)$ уравнения для тензоров $\pi_{\lambda\mu}$ и $\pi_{\lambda\mu}^*$ имеют вид:

$$v_i [\pi_{\lambda\mu} + (3/4) \pi_{\lambda\mu}^*] = (5/3) \langle \langle \overleftrightarrow{\pi} \times \omega_{Bi} \rangle \rangle_{\lambda\mu} = - (5/6) p_i W_{\lambda\mu}^{(1)}; \quad (\text{П.16.20})$$

$$v_i [(3/4) \pi_{\lambda\mu} + (205/48) \pi_{\lambda\mu}^*] = (35/6) \langle \langle \overleftrightarrow{\pi} \times \omega_{Bi} \rangle \rangle_{\lambda\mu} = - (7/6) p_i W_{\lambda\mu}^{(2)},$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_{\lambda\mu}^{(1)} &= 2 \langle \langle \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle \rangle_{\lambda\mu} + (4/5 p_i) \langle \langle \nabla \cdot \mathbf{q} \rangle \rangle_{\lambda\mu}; \\ W_{\lambda\mu}^{(2)} &= (2/p_i) \langle \langle (m_i/T_i) \mathbf{F}_i \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q} - 2\mathbf{q} \cdot \nabla \ln T_i + \\ &\quad + \nabla \cdot \mathbf{q}^* + \mathbf{q}^* \cdot \nabla \ln T_i \rangle \rangle_{\lambda\mu}; \\ \mathbf{F} &= e\mathbf{E}/m + [\mathbf{V}, \omega_B] - dV/dt; \\ \omega_B &= e\mathbf{B}/mc; \\ d/dt &= \partial/\partial t + \mathbf{V} \nabla; \\ (\overleftrightarrow{\pi} \times \mathbf{B})_{\lambda\mu} &= \pi_{\sigma\lambda} \varepsilon_{\mu\sigma\tau} B_\tau; \\ \langle \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle \rangle_{\lambda\mu} &= (1/2) (A_\lambda B_\mu + A_\mu B_\lambda - (2/3) \delta_{\lambda\mu} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}); \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.21})$$

v_i — частота ионно-ионных столкновений, см. гл. 7.

В том же приближении уравнения для векторов \mathbf{q} и \mathbf{q}^* следующие:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{q}, \omega_{Bi}] - v_i \left(\frac{4}{5} \mathbf{q} + \frac{3}{5} \mathbf{q}^* \right) &= \\ = \frac{5}{2} \frac{p_i}{m_i} \nabla T_i + \frac{5}{2} \nabla \left(\frac{T_i}{m_i} \chi \right) - \\ - \frac{7}{2} \nabla \left(\frac{T_i}{m_i} \overleftrightarrow{\pi}^* \mathbf{e} \right) - \frac{7}{2} \frac{\overleftrightarrow{\pi}}{m_i} \nabla T_i + \frac{T_i}{m_i} \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi} - \overleftrightarrow{\pi} \cdot \mathbf{F}_i; \\ v_i \left(\frac{3}{5} \mathbf{q} + \frac{9}{4} \mathbf{q}^* \right) - \frac{7}{4} [\mathbf{q}^*, \omega_{Bi}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.22})$$

Наконец, имеем следующие уравнения для $\chi \equiv a^{(2)}/p_i$ и $\chi^* \equiv a^{(3)}/p_i$:

$$\left. \begin{aligned} \chi + (3/4) \chi^* &= - (2/3v_i) (\text{div} \mathbf{q} - m_i \mathbf{F}_i \mathbf{q} / T_i); \\ (3/4) \chi + (31/16) \chi^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.23})$$

Из (П.16.23) находим:

$$\chi = - \frac{31}{33v_i} \left(\text{div} \mathbf{q} - \frac{m_i}{T_i} \mathbf{F}_i \mathbf{q} \right). \quad (\text{П.16.24})$$

Далее, из (П.16.22) следует:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{5}{2} \frac{p_i}{m_i \omega_{Bi}} [h, \nabla T_i] - \frac{3,9 p_i}{v_i} \nabla_{\parallel} T_i - \frac{2 p_i v_i}{m_i \omega_{Bi}^2} \times \\ \times \nabla_{\perp} T_i + \frac{1}{\omega_{Bi}} \left[h, \left\{ \frac{5}{2} \nabla \left(\frac{T_i}{m_i} \chi \right) - \frac{7}{2} \nabla \left(\frac{T_i}{m_i} \times \right. \right. \right. \\ \times \mathbf{e} \cdot \overleftrightarrow{\pi}^* \left. \left. \left. \right\} + \frac{7}{2} \frac{\overleftrightarrow{\pi}}{m_i} \cdot \nabla T_i + \frac{T_i}{m_i} \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi} - \overleftrightarrow{\pi} \cdot \mathbf{F}_i \right] \right]; \\ \mathbf{q}^* &= - \frac{6}{7} \frac{v_i}{\omega_{Bi}^2} \frac{p_i}{m_i} \nabla_{\perp} T_i + \frac{25}{24} \frac{p_i}{m_i v_i} \nabla_{\parallel} T_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.25})$$

где $h = \mathbf{B}/B$; $\nabla_{\parallel} = h(\mathbf{h} \nabla)$; $\nabla_{\perp} = -[h, [h, \nabla]]$.

В системе координат, две оси которой перпендикулярны к \mathbf{B} , а третья — параллельна (с ортогональными единичными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{B}/B$) компоненты тензоров $\overleftrightarrow{\pi}, \overleftrightarrow{\pi}^*$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \pi_{33} &= -\frac{\rho_i}{v_i} (0,96W_{33}^{(1)} - 0,24W_{33}^{(2)}); \\
 \pi_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_i}{v_i} \left\{ 0,96 (W_{11}^{(1)} + W_{22}^{(1)}) - 0,24 (W_{11}^{(2)} + \right. \\
 &\quad \left. - W_{22}^{(2)}) \right\} - \frac{1}{2} \frac{\rho_i}{\omega_{Bi}} W_{12}^{(1)} - \frac{3}{20} \frac{\rho_i v_i}{\omega_{Bi}^2} \left\{ W_{11}^{(1)} - \right. \\
 &\quad \left. - W_{22}^{(1)} + \frac{3}{10} (W_{11}^{(2)} - W_{22}^{(2)}) \right\}; \\
 \pi_{22} &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_i}{v_i} \left\{ 0,96 (W_{11}^{(1)} + W_{22}^{(1)}) - 0,24 (W_{11}^{(2)} + \right. \\
 &\quad \left. + W_{22}^{(2)}) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\rho_i}{\omega_{Bi}} W_{12}^{(1)} + \frac{3}{20} \frac{\rho_i v_i}{\omega_{Bi}^2} \left\{ W_{11}^{(1)} - W_{22}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{10} (W_{11}^{(2)} - W_{22}^{(2)}) \right\}; \\
 \pi_{12} = \pi_{21} &= \frac{1}{4} \frac{\rho_i}{\omega_{Bi}} (W_{11}^{(1)} - W_{22}^{(1)}) - \frac{3}{10} \frac{\rho_i v_i}{\omega_{Bi}^2} \times \\
 &\quad \times \left(W_{12}^{(1)} + \frac{3}{10} W_{12}^{(2)} \right); \\
 \pi_{13} = \pi_{31} &= -\frac{\rho_i}{\omega_{Bi}} W_{23}^{(1)} - \frac{6}{5} \frac{\rho_i v_i}{\omega_{Bi}^2} \times \\
 &\quad \times \left(W_{13}^{(1)} + \frac{3}{10} W_{13}^{(2)} \right); \\
 \pi_{23} = \pi_{32} &= \frac{\rho_i}{\omega_{Bi}} W_{13}^{(1)} - \frac{6}{5} \frac{\rho_i v_i}{\omega_{Bi}^2} \left(W_{23}^{(1)} + \frac{3}{10} W_{23}^{(2)} \right); \\
 \pi_{33}^* &= \frac{\rho_i}{v_i} (0,17W_{33}^{(1)} - 0,31W_{33}^{(2)}).
 \end{aligned} \tag{П.16.26}$$

Остальные компоненты тензора π^* здесь не приведены (так как ниже они нам не понадобятся).

Приложение 2. Уравнения переноса в приближении нулевого ларморовского радиуса ионов, нулевой поперечной теплопроводности и $\partial/\partial z = 0$

Наличие малых параметров $(1/v_i)\partial/\partial t$, $\rho_i \nabla$, v_i/ω_{Bi} , позволяет существенно упростить многомоментную систему уравнений, приведенную в приложении 1. Проиллюстрируем это на примере, когда магнитное поле направлено вдоль оси z декартовой си-

стемы координат, $\mathbf{B} \parallel z$, скорость \mathbf{V} и электрическое поле \mathbf{E} перпендикулярны к магнитному полю, $\mathbf{V} \perp z$, $\mathbf{E} \perp z$, и все величины независимы от z , $\partial/\partial z = 0$.

Используя уравнения движения (П.16.16) и выражение для потока тепла (П.16.25) находим в нулевом приближении по упомянутым выше малым параметрам:

$$\mathbf{v}_{\perp}^{(0)} = [\mathbf{e}_z, \nabla p/n - e\mathbf{E}]/m\omega_B; \tag{П.16.27}$$

$$\mathbf{q}_{\perp}^{(0)} = (5/2) (\rho/m\omega_B) [\mathbf{e}_z, \nabla T]. \tag{П.16.28}$$

Тензор вязкости в этом приближении равен нулю, так что мы имеем следующую систему уравнений для плотности и давления каждой компоненты плазмы и для электрического тока:

$$\partial n/\partial t + \mathbf{V}_E \nabla n + n \operatorname{div} \mathbf{V}_E - b \nabla p/m = 0; \tag{П.16.29}$$

$$\partial p/\partial t + \mathbf{V}_E \nabla p + (5/3) \operatorname{div} \mathbf{V}_E + (5/3) b \nabla (pT)/m = 0; \tag{П.16.30}$$

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sum_{\alpha=e,i} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\perp \alpha}^{(0)} - (c/B) [\mathbf{e}_z, \nabla (p_e + p_i)], \tag{П.16.31}$$

где $\mathbf{V}_E = c[\mathbf{E}, \mathbf{e}_z]/B$; $\mathbf{b} = [\nabla \omega_B^{-1}, \mathbf{e}_z]$. Совместно с уравнениями Максвелла уравнения (П.16.29) — (П.16.31) представляют собой замкнутую систему уравнений.

Заметим, что уравнения (П.16.29), (П.16.30) — те же, что и уравнения (16.33), полученные взятием моментов от уравнения (16.32) в предположении максвелловского \bar{f} .

Уравнения (П.16.29) — (П.16.30) получаются также из хорошо известных уравнений Брагинского и Кауфмана. Различие в результатах, вытекающих из уравнений переноса приложения 1 и из уравнений типа Брагинского и Кауфмана, обнаруживаются в высших приближениях по отмеченным выше малым параметрам. Эти высшие приближения учитывают диссипативные эффекты и эффекты конечного ларморовского радиуса. Рассмотрим, что получается вместо (П.16.29) — (П.16.31) при учете диссипативных членов порядка $(1/v_i) (\partial/\partial t)$.

Из уравнения движения (П.16.16) и выражения для теплового потока (П.16.25) теперь имеем

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i^{(0)} + \mathbf{V}_i^{(1)}; \tag{П.16.32}$$

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^{(0)} + \mathbf{q}_i^{(1)}, \tag{П.16.33}$$

где $\mathbf{V}_i^{(1)}$ и $\mathbf{q}_i^{(1)}$ определяются производными тензора вязкости π и

связанного с ним тензора π^* , а также производными высшего скалярного момента χ . В соответствии с уравнениями (П.16.24), (П.16.26)

величины π , π^* , χ определяются производными $\mathbf{V}^{(0)}$ и $\mathbf{q}^{(0)}$. Учитывая только эффекты порядка $(1/v_i) \partial/\partial t$, $v_{Ti}^2/a_{\perp}^2 \omega_{Bi} v_i$, с помощью урав-

нений (П.16.24), (П.16.26) — (П.16.28) находим связь между π , π^* , χ и производными от n , T , \mathbf{E} , \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} \pi_{xx} = \pi_{yy} = -\pi_{zz}/2 = & -(\rho_i/3\nu_i) [0,96 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + \\ & + 1,55 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i]; \\ \pi_{\lambda\mu} = 0, \quad \lambda \neq \mu; \end{aligned} \quad (\text{П.16.34})$$

$$\begin{aligned} \pi_{xx}^* = \pi_{yy}^* = -\pi_{zz}^*/2 = & (\rho_i/3\nu_i) [0,17 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \\ & + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + 0,96 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i]; \\ \pi_{\lambda\mu}^* = 0, \quad \lambda \neq \mu; \end{aligned} \quad (\text{П.16.35})$$

$$\chi = -2,35 \rho_i \mathbf{b} \nabla T_i/m_i \nu_i. \quad (\text{П.16.36})$$

При выводе уравнений (П.16.33) — (П.16.35) было учтено, что, как следует из выражения (П.16.21) и уравнения движения (П.16.16), в требуемом приближении

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(0)} = \nabla \rho_i/m_i n_i. \quad (\text{П.16.37})$$

Из уравнений (П.16.16), (П.16.25), (П.16.34) — (П.16.36) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^{(1)} = & -\frac{1}{3nm_i\omega_{Bi}} \left[\mathbf{e}_z \cdot \nabla \frac{\rho_i}{\nu_i} \{0,96 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + \right. \\ & \left. + 1,55 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i \}; \right] \end{aligned} \quad (\text{П.16.38})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^{(1)} = & -\frac{1}{3m_i\omega_{Bi}} \left[\mathbf{e}_z \cdot \nabla \frac{\rho_i T_i}{\nu_i} \{1,55 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + \right. \\ & \left. + 22,51 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i \} + \frac{\rho_i}{\nu_i} \{0,96 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + \right. \\ & \left. + 1,55 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i \} \left(\frac{5}{2} \nabla T_i - \frac{\nabla \rho_i}{u} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.16.39})$$

Подстановка (П.16.32), (П.16.33) в уравнения непрерывности (П.16.15), теплового баланса (П.16.17) и электрического тока (П.16.31) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \partial n/\partial t + \mathbf{V}_E \nabla n + n \operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i = & (1/3m_i) \mathbf{b} \nabla (\rho_i/\nu_i) \times \\ & \times \{0,96 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + 1,55 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i\} = 0; \quad (\text{П.16.40}) \\ \partial \rho_i/\partial t + \mathbf{V}_E \nabla \rho_i + (5/3) \rho_i \operatorname{div} \mathbf{V}_E + (5/3) \mathbf{b} \nabla (\rho_i T_i)/m_i = & \\ = (7/9) \mathbf{b} \nabla (\rho_i T_i/m_i \nu_i) \{1,13 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + 7,54 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i\} = & \\ = (2/9) (\rho_i/\nu_i) \operatorname{div} \mathbf{V}_E \{0,96 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + 1,55 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i\} = 0; \end{aligned} \quad (\text{П.16.41})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_\perp = (c/B) [\mathbf{e}_z \cdot \nabla (\rho_i + \rho_e)] = (1/3) (c/B) [\mathbf{e}_z \cdot \nabla (\rho_i/\nu_i)] \times \\ \times \{0,96 (\operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho_i/m_i n_i) + 1,55 \mathbf{b} \nabla T_i/m_i\}. \end{aligned} \quad (\text{П.16.42})$$

Заметим, что система уравнений (П.16.40) — (П.16.42) может быть получена без использования изложенного выше метода моментов. Эти уравнения можно получить, исходя из дрейфового кинетического уравнения со столкновительным членом (16.2) и решая его в приближении двух полиномов. Это делается следующим образом.

Полагая $\bar{f} = F + f_1$, где $F \sim \exp(-mv^2/2T)$ — максвелловская функция распределения, которая при одинаковой температуре электронов и ионов удовлетворяет условию $C(F) = 0$, и подставляя это \bar{f} в кинетическое уравнение (16.2), приходим к следующему уравнению для функции f_1 :

$$\begin{aligned} \left[- (1/2) A_0 (x_\parallel - x/3) + (1/2) A_1 (x_\parallel - x/3) L_1^{(3/2)}(x) + \right. \\ \left. + (4/3) A_1 L_2^{(1/2)}(x) \right] F = \bar{C}(f_1), \end{aligned} \quad (\text{П.16.43})$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_0 = \operatorname{div} \mathbf{V}_E + \mathbf{b} \nabla \rho/mn + \mathbf{b} \nabla T/m; \\ A_1 = \mathbf{b} \nabla T/m; \quad x = mv^2/2T; \quad x_\parallel = mv_z^2/2T. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.44})$$

Решение (П.16.43) представляем в виде $f_1 = \Phi F$, где

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{\rho} \sum_{m=2}^{\infty} a_m^{(1)} L_m^{(1/2)}(x) + \frac{1}{2\rho} (x_\parallel - x/2) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} L_m^{(3/2)}(x). \end{aligned} \quad (\text{П.16.45})$$

Ограничимся учетом только двух первых членов ряда в каждой из сумм (П.16.45). Умножая (П.16.43) последовательно на $L_2^{(1/2)}$, $L_3^{(1/2)}$, $x_\parallel - x/3$, $(x_\parallel - x/3) L_1^{(3/2)}$ и интегрируя по скоростям, получаем следующую систему уравнений для коэффициентов $a_m^{(p)}$:

$$a_2^{(1)} + (31/12) a_3^{(1)} = 0; \quad a_2^{(1)} + (3/4) a_3^{(1)} = - (5/3) (\rho_i/\nu_i) A_1; \quad (\text{П.16.46})$$

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} + (3/4) a_1^{(2)} = (5/9) (\rho_i/\nu_i) A_0; \quad a_0^{(2)} + (205/36) a_1^{(2)} = \\ = - (70/27) (\rho_i/\nu_i) A_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} a_2^{(1)} = - (155/66) (\rho_i/\nu_i) A_1; \\ a_3^{(1)} = (10/11) (\rho_i/\nu_i) A_1; \\ a_0^{(2)} = (2/3) (\rho_i/\nu_i) [(1025/1068) A_0 + (105/178) A_1]; \\ a_1^{(2)} = - (2/3) (\rho_i/\nu_i) [(15/89) A_0 + (70/89) A_1]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.47})$$

Учитывая (П.16.45) и соотношение $\bar{f} = F + f_1$ и интегрируя (16.2) с весом 1 и $mv^2/2$, получаем следующие уравнения для плотности и давления:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}_E) + \mathbf{b}\nabla p/m - \mathbf{b}\nabla a_0^{(2)}/2m = 0; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}_E\nabla p + (5/3)p \operatorname{div} \mathbf{V}_E + (5/3)\mathbf{b}\nabla(pT)/m + \\ + \mathbf{b}\nabla(T/m) [(5/3)a_2^{(1)} - (7/6)a_0^{(2)} + (7/6)a_1^{(2)}] - \\ - (1/2)a_0^{(2)} \operatorname{div} \mathbf{V}_E = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.48})$$

Подставляя сюда выражения для $a_m^{(p)}$ из (П.16.47), приходим к (П.16.40), (П.16.41). Аналогично получается (П.16.42).

Физически члены $\sim 1/v_i$ в уравнениях (П.16.40), (П.16.41) соответствуют так называемому гирорелаксационному эффекту, обсуждаемому в обзорной работе С. И. Брагинского. (Впервые гирорелаксационный эффект обсуждался Г. И. Будкером и Шлютером в связи с проблемой нагрева плазмы переменным магнитным полем.) Этот эффект состоит в том, что вследствие столкновений между частицами (в данном случае между ионами) изменение их поперечного давления влечет за собой и изменение их продольного давления.

Приложение 3. Неустойчивость энтропийных волн, связанная с гирорелаксационным эффектом

Согласно § 16.6, энтропийные волны не раскачиваются, если градиент температуры не слишком велик по сравнению с градиентом давления:

$$\partial \ln T / \partial \ln p < 7/10 + \beta/4. \quad (\text{П.16.49})$$

и, в частности, при $\nabla T = 0$. Этот результат получается в нулевом приближении по отношению частоты колебаний к частоте ионно-ионных столкновений v_i , $\omega/v_i \rightarrow 0$. Используя уравнения, полученные в приложении 2, выясним роль эффектов порядка ω/v_i в раскачке энтропийных волн при условии (П.16.49).

Линеаризуя уравнения (П.16.40)–(П.16.42) и учитывая уравнение Максвелла (16.6), получаем:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega(n'/n_0) + (\kappa_n - \kappa_B) cE_y'/B_0 + i(\omega - \omega_{pi}^*) B_z'/B_0 + \\ + i\Omega_i p_i'/\rho_{0i} + i(0,96/5)(\Omega_i/v_i) [-i\omega p_i'/\rho_{0i} + \kappa_p cE_y'/B_0 + \\ + i(42/41)(\omega_{Ti} B_z'/B_0 - \Omega_i T_i'/T_{0i})] = 0; \\ -i(\omega - 2\gamma_0 \Omega_i) p_i'/\rho_{0i} + (\kappa_p - \gamma_0 \kappa_B) cE_y'/B_0 - i\gamma_0 \Omega_i n'/n_0 + \\ + i\gamma_0(\omega - 2\omega_{pi}^* + \omega_{ni}) B_z'/B_0 + i1,13(7/15)(\Omega_i/v_i) \times \\ \times (-i\omega p_i'/\rho_{0i} + \kappa_p cE_y'/B_0) + 6,41(7/9)(\Omega_i/v_i)(\Omega_i T_i'/T_{0i} - \\ - \omega_{Ti} B_z'/B_0) = 0; \\ B_z'/B_0 = -(\beta/2)(p_{i\perp}' + p_e')/\rho_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.50})$$

$$\text{где } p_{i\perp}' = p_i' + (1/5)0,96(p_{0i}/v_i) [-i\omega p_i'/\rho_{0i} + \kappa_p cE_y'/B_0 + \\ + i(42/41)(\omega_{Ti} B_z'/B_0 - \Omega_i T_i'/T_{0i})]. \quad (\text{П.16.51})$$

Электронная плотность и давление электронов по-прежнему определяются уравнениями (16.4).

Аналогично (16.8), вводим переменные:

$$\left. \begin{aligned} X' &= (p_{i\perp}' - p_e')/\rho_0; \\ Y' &= (\omega/\kappa_p)(p_{i\perp}' + p_e')/\rho_0 + icE_y'/B_0; \\ Z' &= n'/n_0 - (\kappa_n/\kappa_p)(p_{i\perp}' + p_e')/\rho_0; \\ \rho_0 &= \rho_{0e} + \rho_{0i}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.52})$$

В этих переменных система (П.16.50) выглядит так:

$$\left. \begin{aligned} [\omega + \varepsilon(A + D)]X' + (\kappa_p/\omega)\varepsilon AY' + (\gamma_0 \Omega_i - \varepsilon D)Z' = 0; \\ [-2\gamma_0 \Omega_i + \varepsilon(A + D)]X' + [\kappa_p - \gamma_0 \kappa_B + (\kappa_p/\omega)\varepsilon A]Y' - \varepsilon DZ' = 0; \\ \Omega_i X' + (\kappa_B - \kappa_n)Y' - \omega Z' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.53})$$

$$\text{Здесь } \left. \begin{aligned} \varepsilon &= i(0,96/10)\omega/v_i; \quad A = \omega - 0,59\Omega_i; \\ D &= (42/41)(\Omega_i/\omega)(\omega + 22,02\Omega_i). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.54})$$

Определитель системы (П.16.53) дает дисперсионное уравнение. При $\beta \ll 1$ это уравнение имеет вид

$$\omega^3 - \gamma_0 \Omega_i^2 [2\gamma_0(\kappa_n/\kappa_p) - 1] + \varepsilon[(A + D)(\omega + \gamma_0 \Omega_i \kappa_n/\kappa_p) + \\ + A(2\gamma_0 \Omega_i + \omega + \gamma_0 \Omega_i^2/\omega) + D(2\gamma_0 \Omega_i \kappa_n/\kappa_p - \Omega_i + \\ + \omega \kappa_n/\kappa_p)] = 0. \quad (\text{П.16.55})$$

Здесь ε — малый параметр. В нулевом приближении по ε из (П.16.55) получаем частоты двух ветвей колебаний:

$$\omega^{(\pm)} = \pm \Omega_i [\gamma_0(2\gamma_0 \kappa_n/\kappa_p - 1)]^{1/2}, \quad (\text{П.16.56})$$

вещественные при выполнении условия (П.16.49). Члены порядка ε дают инкремент этих ветвей колебаний:

$$\operatorname{Im} \omega^{(\pm)} = - (0,96/20)(\Omega_i^2/v_i) \{37,8\kappa_n/\kappa_p + 17,89 \pm \\ \pm [\gamma_0(2\gamma_0 \kappa_n/\kappa_p - 1)]^{1/2} [2,69\kappa_n/\kappa_p + 16,71 + \\ + (22,55\kappa_n/\kappa_p - 0,59)(2\gamma_0 \kappa_n/\kappa_p - 1)^{-1}]\}. \quad (\text{П.16.57})$$

В частности, при $\nabla T = 0$ ($\kappa_n/\kappa_p = 1$) из (П.16.57) следует, что ветвь $\omega^{(-)}$ раскачивается с инкрементом

$$\operatorname{Im} \omega^{(-)} = (1/20)\Omega_i^2/v_i. \quad (\text{П.16.58})$$

Неустойчивость имеет место также и в некоторой области положительных κ_n/κ_p . В частности, при $\kappa_n/\kappa_p \gg 1$ из (П.16.57)

получаем

$$\text{Im } \omega^{(\pm)} = \pm 0,3 (\nu_n/\kappa_p)^{3/2} \Omega_i^2/\nu_i, \quad (\text{П.16.59})$$

т. е., как и выше, неустойчива ветвь $\omega^{(-)}$.

Таким образом, видно, что при учете ионно-ионных столкновений область неустойчивости энтропийных волн расширяется. При этом неустойчивость имеет место, даже если градиент равновесной температуры отсутствует, $\nabla T_0 = 0$. Неустойчивость связана с раскачкой возмущений, фазовая скорость которых порядка скорости магнитного дрейфа частиц, $\omega/k_y \approx (v_{\perp}^2/2\omega_B) \partial \ln B_0/\partial x$, причем нарастающие волны бегут в сторону магнитного дрейфа электронов [неустойчива ветвь со знаком минус, см. формулу (П.16.56)]. Такие возмущения особенно существенны при $\beta \approx 1$, когда градиенты магнитного поля и давления одного порядка, $\partial \ln B_0/\partial x \approx \partial \ln p_0/\partial x$.

Инкремент нарастания возмущений при $\nabla T_0 = 0$ на порядок меньше, чем вытекающее из качественных оценок выражение Ω_i^2/ν_i [см. формулу (П.16.58)]. Поэтому из оценки коэффициента турбулентной диффузии $D_{\perp} \approx (\text{Im } \omega)^2/k_{\perp}^2 \text{Re } \omega$ следует, что рассмотренная выше неустойчивость не должна приводить к катастрофическим последствиям при удержании столкновительной плазмы конечного давления. В реальных условиях вследствие этой неустойчивости должны, однако, наблюдаться азимутальные волны с фазовой скоростью порядка магнитного дрейфа частиц.

Приложение 4. Инерционные возмущения с $k_z = 0$ в плазме с $\nabla T = 0$

Инерционные возмущения с $k_z = 0$ описываются уравнением (16.46). В § 16.7 эти возмущения были рассмотрены в пренебрежении тепловыми эффектами нулевого порядка, так что результаты § 16.7 относятся только к плазме с $\nabla T = 0$. Кроме того, в § 16.7 было пренебрежено малыми диссипативными эффектами, связанными с диссипативными частями потока тепла и тензора вязкости. Здесь учтем тепловые эффекты нулевого порядка, а в следующем приложении — диссипативные эффекты.

Исходим из уравнения (16.46), а также из уравнений непрерывности и движения в форме (16.45). В качестве компонент тензора вязкости берем вытекающие из (П.16.26) выражения:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xx}^{(0)} = -\pi_{yy}^{(0)} = -\frac{p_i}{2\omega_B i} \left[\frac{\partial V_x^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial V_y^{(0)}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{2}{5p_i} \left(\frac{\partial q_x^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial q_y^{(0)}}{\partial x} \right) \right]; \\ \pi_{xy}^{(0)} = \pi_{yx}^{(0)} = -\frac{p_i}{2\omega_B i} \left[\frac{\partial V_x^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial V_y^{(0)}}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{2}{5p_i} \left(\frac{\partial q_x^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial q_y^{(0)}}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \right\} (\text{П.16.60})$$

где $V_{\perp}^{(0)}$ и $q_{\perp}^{(0)}$ определены соотношениями (П.16.27), (П.16.28).

Эти выражения для тензора вязкости π представляют собой обобщение соответствующих выражений (16.13) на случай $q^{(0)} \neq 0$. Формулы вида (П.16.60) использовались также при выводе уравнений потенциальных колебаний плазмы нулевого давления в гл. 7.

Дополняем отмеченные выше уравнения уравнениями баланса давлений вида (П.16.30), уравнением для электрического тока (П.16.31) и уравнением Максвелла (16.6). Проводя линеаризацию, приходим к следующей системе уравнений для возмущений $n', p'_e, p'_i, B'_z, E'_y$:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega n'/n_0 + i\Omega p'/p_0 + (\kappa_n - \kappa_B) cE'_y/B_0 + i(\omega - \omega_p^*) B'_z/B_0 = 0; \\ -i(\omega - 2\gamma_0\Omega) p'/p_0 - i\gamma_0\Omega n'/n_0 + (\kappa_p - \gamma_0\kappa_B) cE'_y/B_0 + \\ + i\gamma_0(\omega - 2\omega_p^* + \omega_n) B'_z/B_0 = 0; \\ 4\pi(p'_i + p'_e) + B'_z B_0 = 0; \\ 3\Omega_i n'/n_0 - (\omega - 2\omega_{pi}^* + \omega_{ni}) B'_z/B_0 + 2(\omega - 3\Omega_i) p'_i/p_0 + \\ + i(\kappa_p/\omega_{pi}^*) (2\omega - 3\Omega_i) cE'_y/B_0 = 0. \end{aligned} \right\} (\text{П.16.61})$$

Первые два уравнения — для возмущений плотности и давления — относятся к обоим сортам частиц, электронам и ионам, так что при их использовании необходимо расставить индексы e или i у соответствующих величин. Эти два уравнения встречались выше [см. (16.4)]. Третье уравнение системы (П.16.61) выводится с помощью уравнения Максвелла, а четвертое получается из уравнения

(16.14) с подстановкой в него тензора π , вычисленного по формулам (П.16.60). Заметим также, что система уравнений (П.16.61), а именно последнее уравнение этой системы при $\nabla T \neq 0$, не может быть получена из уравнений переноса типа Браггинского. Она, однако, следует из уравнений переноса типа Хердана — Лиля.

В переменных X, Y, Z , определенных соотношениями (16.38), уравнения (П.16.61) могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} \omega X + \gamma_0\Omega_i Z = 0; \\ 2\gamma_0\Omega_i X + (\kappa_B - \gamma_0\kappa_n) Y = 0; \\ \Omega_i X + (\kappa_B - \kappa_n) Y - \omega Z = 0; \\ 2(\omega - 3\Omega_i) X + (\kappa_p/\omega_{pi}^*) (2\omega - 3\Omega_i) Y + 3\Omega_i Z - (2/\omega_{pi}^*) \times \\ \times [\omega^3 - \omega(\Omega_i + \omega_{pi}^*) + \Omega_i(\omega_{pi}^* + \omega_{Ti})] (p'_i + p'_e)/p_0 = 0. \end{aligned} \right\} (\text{П.16.62})$$

Здесь предположено $T_{0e} = T_{0i} = T$; $p_0 = p_{0i} + p_{0e}$.

Первые три уравнения этой системы — не что иное как уравнения (16.7). Они описывают энтропийные (безынерционные) волны с $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $Z \neq 0$. Полагая, напротив, $X=Y=Z=0$, получаем из четвертого уравнения системы (П.16.62) дисперсионное уравнение для инерционных волн:

$$\omega^2 - \omega (\Omega_i + \omega_{pi}^*) + \Omega_i (\omega_{pi}^* + \omega_{Ti}) = 0, \quad (\text{П.16.63})$$

представляющее собой обобщение дисперсионного уравнения (16.19) на область $\nabla T \neq 0$ и совпадающее с дисперсионным уравнением (15.16) (при $k_z = 0$), полученным для случая бесстолкновительной плазмы.

В соответствии со сказанным в § 15.3 возмущения, описываемые уравнением (П.16.63), нарастают во времени, если

$$\kappa_T / \kappa_p < -(2 + \beta)^2 / 8\beta, \quad (\text{П.16.64})$$

что в терминах $\eta \equiv \kappa_T / \kappa_n$ означает

$$-1 < \eta < -(2 + \beta)^2 / [8\beta + (2 + \beta)^2]. \quad (\text{П.16.65})$$

Заметим, что соответствующие ветви колебаний обнаруживаются лишь при учете в уравнениях переноса малых членов порядка $(k_\perp \rho_i)^2$. В частности, инерционные волны не могут быть изучены, если поведение плазмы описывается с помощью дрейфового кинетического уравнения (16.2), не дополненного какими-либо уравнениями для ларморовских осцилляций функции распределения.

Приложение 5. Роль поперечной теплопроводности и поперечной вязкости в возмущениях с $k_z = 0$

Согласно (П.16.65), возмущения, описываемые дисперсионным уравнением (П.16.63), нарастают во времени при $\partial \ln T / \partial \ln n$, лежащем в некотором интервале отрицательных значений. При малых β этот интервал довольно узок. Поэтому для выяснения возможности раскачки колебаний типа (П.16.63) вне интервала (П.16.65) необходимо учесть в дисперсионном уравнении члены порядка ω / v_i или порядка $(k_\perp \rho_i)^2 v_i / \omega$.

Для членов порядка ω / v_i оказывается, что если пользоваться введенными выше переменными X , Y , Z , то все эти члены выражаются только через переменные X , Y , Z , которые в случае инерционных волн равны нулю. Это означает, что диссипативные эффекты порядка ω / v_i не входят в дисперсионное уравнение для инерционных волн, и потому при учете членов порядка ω / v_i уравнение (П.16.61) остается в силе. Роль этих членов в безынерционных возмущениях была изучена в приложении 3. Поэтому ниже будет полагаться $\omega / v_i = 0$.

Итак, изучим эффекты, описываемые уравнениями, полученными в приложении 1, в приближении $\omega / v_i \rightarrow 0$, учитывая, в отличие от п. 1 приложения 4, не только инерцию и магнитную вязкость ионов, но также их столкновительную поперечную теплопроводность и столкновительную поперечную вязкость. В этом приближении вектор теплового потока q_i не содержит дополнительных («необычных»)

членов, приведенных в приложении 1, и определяется хорошо известным выражением, полученным в свое время С. И. Брагинским:

$$q_i = \frac{5}{2} \frac{\rho_i}{m_i \omega_{Bi}} [e_z, \nabla T_i] - 2 \frac{\rho_i v_i}{m_i \omega_{Bi}^2} \nabla_\perp T_i. \quad (\text{П.16.66})$$

Что касается выражения для тензора вязкости π , то оно отличается от обычно используемого:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xx} = -\pi_{yy} = & -(\rho_i / 2\omega_{Bi}) W_{xy}^{(1)} - (3/20) (\rho_i v_i / \omega_{Bi}^2) \times \\ & \times [W_{xx}^{(1)} - W_{yy}^{(1)} + (3/10) (W_{xx}^{(2)} - W_{yy}^{(2)})]; \\ \pi_{xy} = \pi_{yx} = & (\rho_i / 4\omega_{Bi}) (W_{xx}^{(1)} - W_{yy}^{(1)}) - (3/10) (\rho_i v_i / \omega_{Bi}^2) \times \\ & \times [W_{xy}^{(1)} + (3/10) W_{xy}^{(2)}]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.67})$$

Здесь, как следует из (П.16.21) и (П.16.37),

$$\left. \begin{aligned} W_{\lambda\mu}^{(1)} = & \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{2}{3} \delta_{\lambda\mu} \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{2}{5\rho_i} \left(\frac{\partial q_\lambda}{\partial x_\mu} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{2}{3} \delta_{\lambda\mu} \operatorname{div} \mathbf{q} \right); \\ W_{\lambda\mu}^{(2)} = & -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial q_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{2}{3} \delta_{\lambda\mu} \operatorname{div} \mathbf{q} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.16.68})$$

Соотношения (П.16.67) сводятся к соотношениям типа Брагинского, если опустить члены с $W_{\lambda\mu}^{(2)}$ и в тензоре $W_{\lambda\mu}^{(1)}$ пренебречь членами, содержащими производные от потока тепла. Ни одно из этих приближений, однако, не справедливо в случае интересующих нас задач, поскольку q_\perp и V_\perp являются величинами одного и того же порядка, пропорциональными пространственным производным температуры и давления.

Выражения (П.16.66) и (П.16.67) отличаются соответственно от (П.16.28) и (П.16.60) членами порядка v_i / ω_{Bi} . Вследствие закона сохранения импульса при столкновениях между ионами члены порядка v_i / ω_{Bi} не входят в выражение для скорости, так что при вычислении тензора вязкости можно полагать $V_\perp = V_\perp^{(0)}$, где $V_\perp^{(0)}$ определяется формулой (П.16.27). Та же самая точность достаточна при подстановке V_\perp в инерционный член уравнения (16.46), поскольку он уже содержит малый множитель порядка ω .

В результате получается следующая система уравнений для n' , ρ_e' , ρ_i' , B_z' , E_y' : остающиеся неизменными уравнения непрерыв-

ности и баланса тепла для электронов [см. уравнения (16.34)], уравнения баланса тепла ионов

$$-i(\omega - 2\gamma_0\Omega_i + \alpha\omega) \rho'_i/\rho_{0i} - i(\gamma_0\Omega_i - \alpha\omega) n'/n_0 + (\kappa_p - \gamma_0\kappa_B) \times \\ \times cE'_y/B_0 + i\gamma_0(\omega - 2\omega_{pi}^* + \omega_{ni}) B'_z/B_0 = 0, \quad (\text{П.16.69})$$

инерционное уравнение [ср. с последним уравнением (П.16.62)]

$$[3\Omega_i - (57/80)\alpha\omega] n'/n_0 - (\omega - 2\omega_{pi}^* + \omega_{ni}) B'_z/B_0 + [2(\omega - 3\Omega_i) + \\ + (93/80)\alpha\omega] \rho'_i/\rho_{0i} + i(\kappa_p/\omega_{pi}^*) [2\omega - 3\Omega_i + (3/20)\alpha\omega] cE'_y/B_0 = 0 \\ (\text{П.16.70})$$

и уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c$, которое приводит к уравнению (16.35). В (П.16.69), (П.16.70) введено обозначение

$$\alpha = i(4/3)(k_{\perp}\rho_i)^2 \nu_i/\omega. \quad (\text{П.16.71})$$

С помощью отмеченных выше уравнений может быть получено дисперсионное уравнение; символически его можно записать в виде

$$\{\omega^2 + \gamma_0\Omega_i^2 [1 + 2\gamma_0(\kappa_B - \kappa_n)/(\kappa_p - \gamma_0\kappa_B)]\} [\omega^2 - \omega(\Omega_i + \omega_{pi}^*) + \\ + \Omega_i(\omega_{pi}^* + \omega_{Ti})] = \omega^4 O(\alpha), \quad (\text{П.16.72})$$

где $O(\alpha)$ означает члены порядка α . Они довольно сложны, и потому мы их здесь не приводим. Приведем, однако, окончательный результат для простейшего случая $\beta \ll 1$ и $\nabla T_0 = 0$.

К частотам безынерционных (энтропийных) ветвей колебаний $\text{Re } \omega = \omega^{(\pm)}$ [см. уравнение (П.16.56)] добавляется мнимая часть

$$\text{Im } \omega^{(\pm)} = \mp (k_{\perp}\rho_i)^2 \nu_i (12 + 2\sqrt{35})/3\sqrt{35}. \quad (\text{П.16.73})$$

Видно, что раскачивается ветвь $\text{Re } \omega = \omega^{(-)}$, как и при учете гирорелаксационного эффекта (см. приложение 3).

Инерционные волны при $\beta \ll 1$ и $\nabla T_0 = 0$ имеют частоты $\text{Re } \omega_1 = \omega_{ni}$, $\text{Re } \omega_2 = \Omega_i$. В пренебрежении членами порядка β

$$\text{Im } \omega_1 = 0; \quad \text{Im } \omega_2 = - (3/10)(k_{\perp}\rho_i)^2 \nu_i. \quad (\text{П.16.74})$$

Это означает, что колебания, соответствующие ветви ω_1 , не нарастают и не затухают, тогда как ветвь ω_2 оказывается затухающей.

Библиографический обзор к гл. 16

1. Церковников Ю. А. Конвекционная неустойчивость разреженной плазмы.—«Укр. матем. журн.», 1961, т. 13, с. 190.

Здесь впервые проанализированы уравнения двухжидкостной гидродинамики, учитывающие «дрейфовый» поток тепла и было показано, что в столкнительной неоднородной плазме могут существовать колебания с частотами порядка $\omega \approx \Omega$, неустойчивые при не слишком малых значениях градиента температуры.

2. Кадомцев Б. Б. О конвективной неустойчивости плазменного шнура.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1959, т. 37, с. 1096. Здесь впервые были исследованы энтропийные волны, § 16.2. В работе предполагалось, что магнитное поле имеет конечную кривизну, $a/R > (k_{\perp}\rho_i)^2$.

3. Михайловская Л. В. Колебания неоднородной плазмы конечного давления.—«Журн. техн. физ.», 1967, т. 37, с. 1974.

Показано, что результаты работы [2] об энтропийных волнах остаются в силе при $R \rightarrow \infty$ (в прямом магнитном поле). Введены перемещенные X, Y, Z . Получено дисперсионное уравнение для альфвеновских волн при $k_z \neq 0$ в плазме с $\nabla T = 0$, § 16.2.

4. Михайловская Л. В. О неустойчивостях столкнительной плазмы с неоднородной температурой.—«Журн. техн. физ.», 1971, т. 41, с. 241.

Исследовались неустойчивости с $k_z \approx \omega/v_{Ti}$, § 16.5. Получено дисперсионное уравнение для инерционных (альфвеновских) волн с $k_z \neq 0$, приложение 4.

5. Михайловский А. Б., Цыпин В. С. Неустойчивость энтропийных волн из-за гирорелаксационного эффекта в плазме конечного давления.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 524.

Получены уравнения переноса в приближении нулевого ларморовского радиуса ионов и $\partial/\partial z = 0$, приложение 2, и рассмотрена роль эффектов порядка ω/v_i при $k_z = 0$, приложение 3.

6. Mikhailovsky A. B., Tsypin V. S. Transport equations and gradient instabilities in a high pressure collisional plasma.—«Plasma Phys.», 1971, v. 13, p. 785.

Получены общие уравнения переноса, приложение 1. Рассматривались вопросы, изложенные в приложениях 2—5, в частности вопросы, касающиеся эффектов порядка $(k_{\perp}\rho_i)^2 \nu_i/\omega$, приложение 5.

7. Михайловский А. Б., Цыпин В. С. Неустойчивости плазмы конечного и большого давления с конечной электронной теплопроводностью.—«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 1964.

Исследовались неустойчивости с $\omega \approx (k_z v_{Te})^2/\nu_e$, § 16.4.

8. Nemov V. V. Effect of ion viscosity and thermal conductivity of the drift instability in an inhomogeneous high-pressure collisional plasma.—«Nucl. Fusion», 1972, v. 12, p. 643.

В работе рассмотрена роль теплообмена между электронами и ионами и электронной теплопроводности в градиентных неустойчивостях с $\beta \geq 1$.

9. Цыпин В. С. Неустойчивость сильностолкнительной плазмы конечного давления.—«Журн. техн. физ.», 1971, т. 41, с. 1747.

Рассмотрены возмущения с $\omega < \nu_{ei}$. Показано, что в этих условиях плазма с $\nabla n_0 \neq 0$ может быть неустойчива, если $\nabla T = 0$.

10. Цыпин В. С. Влияние ионной вязкости на устойчивость плазмы конечного давления.—«Журн. техн. физ.», 1972, т. 42, с. 727.

Исследуется роль эффектов порядка ω/v_i и $(k_{\perp}\rho_i)^2 \nu_i/\omega$ в возмущениях с $k_z = 0$ при произвольных значениях параметра β .

11. Лапшин В. И., Немов В. В. Влияние электронной теплопроводности и электрон-ионного теплообмена на дрейфовую неустойчивость сильностолкнительной плазмы с конечным газокинетическим давлением.—«Ядерный синтез», 1975, т. 15, с. 1113.

12. Лапшин В. И., Немов В. В. Влияние электрон-ионного теплообмена на дрейфовую неустойчивость слабостолкновительной плазмы с конечным газокинетическим давлением.—«Журн. техн. физ.», 1976, т. 46, с. 69.
В работах [11, 12] исследуются различные случаи неустойчивостей столкновительной плазмы.
13. Herdan R., Lilley B. I. Dynamical equations and transport relationships for a thermal plasma.—«Rev. Mod. Phys.», 1960, v. 32, p. 731.
14. Nemov V. V. The hydrodynamics of collisional plasma in a strong inhomogeneous magnetic field.—«Nucl. Fusion», 1970, v. 10, p. 19.
Работы [13, 14] посвящены методам получения уравнений переноса столкновительной плазмы.

Глава 17

НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ

§ 17.1. Введение

Переходим к исследованию неустойчивостей неоднородной плазмы большого давления ($\beta \gg 1$) и с малым градиентом давления ($|\partial \ln p / \partial \ln n| \ll 1$). Такое исследование может представлять интерес, в частности, для проблемы удержания горячей плазмы давлением плотной оболочки нейтрального газа. (Идеи о таком удержании высказывались Альфвенем, Ленертом, Будкером и др.) Условия $\beta \gg 1$ и $|\partial \ln p / \partial \ln n| \ll 1$ могут реализовываться также в центральной области магнитно-удерживаемой плазмы, например в центральной области плазмы тэта-пинча. Кроме того, условие $\beta \gg 1$ типично для многочисленных разновидностей космической плазмы, в частности для некоторых областей плазмы солнечного ветра.

В § 17.2 в пренебрежении столкновениями между частицами исследуются простейшие типы неустойчивостей плазмы с нулевым градиентом давления ($\nabla p_0 = 0$), находящейся в однородном магнитном поле ($\nabla B_0 = 0$). Такая плазма называется также бессиловой. (Более полное исследование неустойчивостей бессиловой плазмы проводится в приложении 1.)

С физической точки зрения плазма с $\nabla p_0 = \nabla B_0 = 0$ интересна тем, что в ней отсутствуют дрейф частиц поперек силовых линий магнитного поля (так как $\nabla B_0 = 0$) и ларморовский ток (так как $\nabla p_0 = 0$), так что на первый взгляд может показаться, что нет никаких причин для неустойчивостей. Однако при более глубоком рассмотрении стационарного состояния бессиловой плазмы можно заметить, что из-за наличия градиентов температуры и плотности [при $\nabla p_0 = 0$ они связаны соотношением $\nabla (nT) = 0$] в такой плазме имеются потоки высших порядков, например поток тепла. Эти потоки высших порядков и являются причиной неустойчивостей бессиловой плазмы. Поэтому при гидродинамическом исследовании неустойчивостей бессиловой (или почти бессиловой) плазмы с $\beta \gg 1$, вообще говоря, необходимо использовать гидродинамические уравнения, корректно учитывающие роль высших моментов функции распределения. Соответствующие гидродинамические уравнения анализируются в приложении 2 к данной главе.

Так как градиенты давления и магнитного поля связаны уравнением равновесия $\partial (p_0 + B_0^2/8\pi)/\partial x = 0$ (имеется в виду прямое магнитное поле $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$), то $\partial \ln B / \partial \ln n = -(\beta/2) \partial \ln p / \partial \ln n$. Поскольку $\beta \gg 1$, наличие даже малого градиента давления плазмы обуславливает наличие значительного градиента магнитного поля. Поэтому при $|\partial \ln p / \partial \ln n| \approx 1/\beta$ $|\partial \ln B / \partial \ln n| \approx 1$. При этом исследование неустойчивостей должно проводиться с учетом градиента магнитного поля и связанного с ним магнитного дрейфа частиц. Такое исследование проводится в § 17.3, где рассмотрены эффекты нулевого порядка по $(k_{\perp} \rho_i)^2$, и частично в приложении 3, где анализируются эффекты порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2$.

Если иметь в виду проблему удержания плазмы оболочкой нейтрального газа, то при исследовании неустойчивостей необходимо различать центральную область, где плазма имеет наибольшую температуру и наименьшую плотность, и периферийную, где температура плазмы мала, а плотность велика. Поскольку характерная частота градиентных возмущений растет с температурой, ($\omega_* \sim T$), а частота парных столкновений растет с плотностью, но падает с температурой, то

теория градиентных неустойчивостей периферийной области плазмы должна учитывать парные столкновения. Сведения о неустойчивостях, обнаруживаемых в условиях частых столкновений между частицами, приведены в § 17.4 [нулевое приближение по $(k_{\perp} \rho_i)^2$] и частично в приложении 3 (эффекты порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2$).

Заключительные замечания о неустойчивостях плазмы большого давления содержатся в § 17.5.

§ 17.2. Неустойчивости неоднородной плазмы большого давления в однородном магнитном поле

Пусть неоднородная бесстолкновительная плазма с давлением $p_0 \gg B_0^2/8\pi$ ($\beta \gg 1$) находится в однородном магнитном поле \mathbf{B}_0 , $\nabla B_0 = 0$. В соответствии с уравнением равновесия (13.52) условие $\nabla B_0 = 0$ удовлетворяется, если $\nabla p_0 = 0$. Рассмотрим безынерционные возмущения такой плазмы с частотами $\omega \ll k_z v_{Te}$ и поперечными длинами волн, большими ларморовского радиуса ионов, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$. Как следует из уравнения (П.15.31), в пределах больших давлений ($\beta \rightarrow \infty$) такие возмущения описываются дисперсионным уравнением

$$\frac{1}{T} \hat{l}_i(TxW) + \frac{i\sqrt{\pi}}{4} \left\{ 2\hat{l}_i \left(\frac{xW}{T} \right) \hat{l}_i(TxW) - [\hat{l}_i(xW)]^2 \right\} = 0. \quad (17.1)$$

Здесь $x = \omega / |k_z| v_{Ti}$; $v_{Ti} = (2T/m_i)^{1/2}$;

$$\hat{l}_i = 1 - (\omega_T/\omega) \partial/\partial \ln T; \quad \omega_T = k_y (\partial T/\partial x)/m_i \omega_{Bi};$$

$W = W(x)$; T — температура плазмы в стационарном состоянии.

При $x \gg 1$ из (17.1) следует квадратное уравнение для ω , так что

$$\omega = (2/3) \omega_T (1 \pm i/\sqrt{2}). \quad (17.2)$$

Видно, что относительно рассматриваемых возмущений плазма неустойчива.

Из (17.1) следует также, что неустойчивость имеет место и при $x \ll 1$, причем в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &= \omega_T/2; \\ \gamma \equiv \operatorname{Im} \omega &= \frac{\pi-2}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega_T^2}{|k_z| v_{Ti}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Бесстолкновительные неустойчивости, описываемые уравнениями (17.2) и (17.3), имеют аналоги и в столкновительной плазме, о чем будет сказано в § 17.4. Что касается результата (17.2), то его можно получить не только на основе используемого здесь кинетико-электродинамического подхода, но и при гидродинамическом описании плазмы, которое используется при исследовании неустойчивостей столкновительной плазмы.

Покажем, что уравнение (17.2) получается в рамках двухжидкостного описания плазмы.

Для каждого сорта зарядов (электронов и ионов) запишем уравнение непрерывности

$$\partial n/\partial t + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0 \quad (17.4)$$

и примем, что скорость \mathbf{V} имеет только компоненты, поперечные магнитному полю ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\perp}$). Из уравнений движения соответствующих компонент плазмы находим выражение для \mathbf{V}_{\perp} :

$$\mathbf{V}_{\perp} = c[\mathbf{E}, \mathbf{B}]/B^2 - c[\nabla p, \mathbf{B}]/eB^2 n. \quad (17.5)$$

После подстановки (17.5) в (17.4) и линеаризации получаем

$$-i\omega n'/n_0 + \kappa_n c E_y'/B_0 + i\omega B_z'/B_0 = 0. \quad (17.6)$$

Здесь индекс «нуль» относится к равновесным величинам, штрих — к возмущенным; $\kappa_n \equiv \partial \ln n_0/\partial x$. Учтено, что в равновесном состоянии $\nabla B_0 = 0$, $\nabla p_0 = 0$.

Вычисляя с помощью (17.5) плотность электрического тока

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sum_{e,i} en\mathbf{V}_{\perp} \quad (17.7)$$

и подставляя результат в уравнение Максвелла, находим связь между возмущениями давления и магнитного поля:

$$(p_e' + p_i')/(p_{0e} + p_{0i}) = -(2/\beta) B_z'/B_0, \quad (17.8)$$

что при $\beta \gg 1$ означает

$$p'_e + p'_i = 0. \quad (17.9)$$

Связь p' с n' находим так. Возмущения электронной компоненты считаем изотермическими, $T'_e = 0$, т. е.

$$p'_e = n' T_{0e}. \quad (17.10)$$

Давление ионной компоненты удовлетворяет уравнению теплового баланса, которое представим в виде

$$(\partial/\partial t + \mathbf{V}_i \nabla) p_i + \gamma_0 p_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i + (\gamma_0 - 1) \operatorname{div} \mathbf{q}_i = 0, \quad (17.11)$$

где γ_0 — показатель адиабаты; \mathbf{q}_i — «косой» поток тепла, (см. гл. 7):

$$\mathbf{q}_i = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \frac{c p_i}{e_i B^2} [\mathbf{B}, \nabla T_i]. \quad (17.12)$$

Из (17.10) и (17.11) после линеаризации получаем

$$-i\omega p'_i/p_{0i} + i\gamma_0 (\omega - \omega_{Ti}) B'_z/B_0 = 0. \quad (17.13)$$

С помощью (17.6) и (17.13) находим искомую связь p'_i с n' :

$$p'_i = \gamma_0 p_{0i} \left(1 - \frac{\omega_{Ti}}{\omega} \right) \left(\frac{n'}{n_0} + i \frac{c E_y}{B_0 \omega} \kappa_n \right). \quad (17.14)$$

Теперь остается выразить электрическое поле через плотность, для чего используем уравнение продольного движения электронов

$$e_e E_z n - \partial p_e / \partial z = 0. \quad (17.15)$$

Отсюда следует

$$n' = -i e_e n_0 E_z / k_z T_{0e}. \quad (17.16)$$

Мы считаем, что магнитное поле не искривляется, $B'_z = 0$, так что

$$E_z = (k_z/k_y) E_y. \quad (17.17)$$

Из (17.9), (17.10), (17.14), (17.16), (17.17) при $T_{0e} = T_{0i}$ вытекает дисперсионное уравнение

$$(1 - \omega_{Ti}/\omega)^2 + 1/\gamma_0 = 0. \quad (17.18)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\omega = \omega_{Ti} \frac{1 \pm i/\sqrt{\gamma_0}}{1 \pm 1/\gamma_0}. \quad (17.19)$$

Поскольку мы пренебрегаем столкновениями и продольным движением ионов, то ионы следует считать жидкостью с двумя степенями свободы, а при этом $\gamma_0 = 2$. Видно, что при $\gamma_0 = 2$ уравнение (17.19) есть не что иное, как уравнение (17.2).

Более подробно неустойчивости плазмы большого давления с $\nabla p_0 = 0$, $\nabla B_0 = 0$ рассматриваются в приложении 1 к настоящей главе (см. также библиографический обзор).

§ 17.3. Неустойчивости плазмы большого давления с малым градиентом давления

В отличие от § 17.2, здесь полагаем $\nabla p_0 \neq 0$. Столкновениями между частицами и искривленностью статического магнитного поля пренебрегаем. Полагаем $\beta \gg 1$ и ограничиваемся рассмотрением класса плазм с $|\partial \ln p / \partial \ln n| \leq 1/\beta$, т. е. $|1 + \eta| \leq 1/\beta$. Исследуем возмущения с $\omega \ll \omega_{Bi}$, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$, описываемые дисперсионным уравнением (13.53), т. е. возмущения магнитно-звукового типа.

1. Возмущения с $k_z = 0$. Как отмечалось в § 13.9, при $k_z = 0$ дисперсионное уравнение (13.53) расщепляется на два уравнения: (13.60) и (13.61). При максвелловском распределении частиц по скоростям выражения для $\epsilon_{22}^{(0,0)}$, $\epsilon_{33}^{(0,0)}$, входящих в (13.60), (13.61), определяются формулами (15.2), (П.15.3). Уравнение (13.60) соответствует возмущениям с $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$, а уравнение (13.62) — возмущениям с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$.

Из (13.60), (13.62) следует, что плазма с $\nabla p_0 = 0$ устойчива относительно всех возмущений с $k_z = 0$. Если $\nabla p_0 \neq 0$, то получится следующее.

а. Возмущения с $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. Критерий устойчивости, вытекающий из (13.60) [см. также (15.1)], при произвольных β и $\partial \ln p / \partial \ln n$ определяется формулой (15.10). В частном случае $\beta \gg 1$ и $|\partial \ln p / \partial \ln n| \approx 1/\beta$ из (15.10)

следует, что для устойчивости необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

$$\partial \ln p / \partial \ln n > 0; \quad (17.20)$$

$$\partial \ln p / \partial \ln n < -4/\beta. \quad (17.21)$$

Это означает, что плазма устойчива при произвольном значении градиента давления, если он совпадает по направлению с градиентом плотности. В случае противоположно направленных ∇p_0 и ∇n_0 для устойчивости требуется, чтобы ∇p_0 превышал некоторое критическое значение.

б. Возмущения с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$. Пусть ∇p_0 достаточно мало, так что $\Omega \ll \omega_T$. Тогда решение уравнения (13.61) удовлетворяет условию $\Omega < \omega < \omega_T$ и имеет вид

$$\omega^2 = \omega_T \Omega. \quad (17.22)$$

Учитывая, что $\kappa_T \approx -\kappa_n$, $\kappa_B = -(\beta/2, \kappa_p)$, отсюда находим, что возмущения рассматриваемого типа не раскачиваются, если условие (17.20) выполнено. При невыполнении условия (17.20), т.е. при $\partial \ln p / \partial \ln n < 0$, имеет место неустойчивость.

В другом предельном случае, когда $\Omega \gg \omega_T$, уравнение (13.61) имеет приближенное решение:

$$\omega = -\omega_{Te} \left[1 - \frac{\kappa_T / \kappa_B}{\ln(-\kappa_B / \kappa_T)} \right]. \quad (17.23)$$

Отсюда получится качественно такая же картина, как и при $\Omega \ll \omega_T$, т.е. имеет место устойчивость, если $\partial \ln p / \partial \ln n > 0$, и неустойчивость в противном случае.

2. Возмущения с $k_z < \omega / v_{Te}$. Пусть k_z достаточно мало ($k_z < \omega / v_{Te}$). При малых, но конечных k_z и $\partial \ln p / \partial \ln n > 0$ следует учитывать влияние резонансных ионов на чисто электронные ветви колебаний (17.22), (17.23) (в пренебрежении ионами такие колебания при $\partial \ln p / \partial \ln n > 0$ не раскачиваются и имеют $\gamma \equiv \text{Im } \omega = 0$). Тогда получаем дисперсионное уравнение

$$\epsilon_{33} + i \frac{|\epsilon_{23}|^2}{|\epsilon_{22} - N^2|^2} \text{Im } \epsilon_{22}^{(i)} = 0, \quad (17.24)$$

где

$$\epsilon_{23} = i \frac{4\pi e^2 n_0 T k_z k_\perp}{m_e \omega_B \omega^3} \left(1 - \frac{\omega_{Te}}{\omega} \right), \quad (17.25)$$

а ϵ_{22} , ϵ_{33} определяются формулами (15.2), (П.15.3).

Из (17.24) можно получить пущую добавку к частоте колебаний (17.22), (17.23). Она оказывается положительной, $\text{Im } \omega > 0$, т.е. при положительном $\partial \ln p / \partial \ln n$ имеет место раскачка колебаний. Раскачиваемые колебания имеют отрицательную энергию, так что резонансные ионы в процессе взаимодействия с колебаниями увеличивают свою энергию (ср. с аналогичной ситуацией в приложении 1 к гл. 15).

3. Возмущения с $v_{Ti} < \omega / k_z < v_{Te}$. В приближении $\beta \gg 1$, $\partial \ln p / \partial \ln n \ll 1$ и при ω / k_z , лежащем в указанном интервале скоростей, уравнение (13.53) сводится к следующему:

$$1 + \frac{\omega_{Te}}{\omega} - \left[\left(1 - \frac{\omega_{Ti}}{\omega} \frac{\partial}{\partial \ln T} \right) \left\langle \frac{\omega_{e\perp}}{\omega - \Omega_i \epsilon_\perp} \right\rangle \right] \times \\ \times \left(1 + \frac{\omega_{Te}}{\omega} - \frac{\Omega_e}{\omega} \right) = 0, \quad (17.26)$$

где $\epsilon_\perp = m v_\perp^2 / 2T$; $\langle \dots \rangle$ — усреднение по максвелловской функции распределения, нормированной на единицу.

При $\Omega_i = 0$ это уравнение имеет решение (17.2), соответствующее нарастающим возмущениям, рассмотренным в § 17.2 [решение (17.2) со знаком $\text{Im } \omega > 0$]. С увеличением Ω_i / ω_{Ti} до значений порядка и больше единицы эти ветви колебаний и связанная с ними неустойчивость исчезают при любом знаке $\partial \ln p / \partial \ln n$.

4. Возмущения с $\omega < k_z v_{Ti}$. В этом приближении из (13.53) следует:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= \omega_{Ti} / 2; \\ \gamma \equiv \text{Im } \omega &= \frac{\omega_{Ti}^2}{4 \sqrt{\pi} |k_z| v_{Ti}} \left(\pi - 2 - 12 \frac{\Omega_i}{\omega_{Ti}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17.27)$$

При $\nabla p = 0$ ($\Omega_i = 0$) этот результат совпадает с (17.3) и описывает кинетическую неустойчивость, об-

суждавшуюся в § 17.2. Из (17.27) видно, что при положительном $\partial \ln p / \partial \ln n$ эта неустойчивость подавляется, если

$$\partial \ln p / \partial \ln n > 1/6\beta. \quad (17.28)$$

При $\partial \ln p / \partial \ln n < 0$ наличие градиента давления способствует неустойчивости.

§ 17.4. Неустойчивости столкновительной плазмы большого давления

1. Возмущения с $k_z = 0$ в пренебрежении диссипативными эффектами. Возмущения столкновительной плазмы с $k_z = 0$ обсуждались, в частности, в § 16.1, 16.2. Они представляют собой совокупность двух типов волн: инерционных (называемых также альфвеновскими) и безынерционных (энтронийных).

При $\beta \gg 1$ и $|\partial \ln p / \partial \ln n| \approx 1/\beta$ инерционные волны описываются следующим дисперсионным уравнением, вытекающим из (П.16.63):

$$\omega^2 - \Omega_i \omega - \omega_{ni} \Omega_i = 0. \quad (17.29)$$

Из (17.29) следует, что эти волны раскачиваются при

$$-4 < b < 0, \quad (17.30)$$

где $b \equiv \kappa_B / \kappa_n$ — параметр, характеризующий неоднородность магнитного поля. Инкремент нарастания таких возмущений порядка

$$\text{Im } \omega \approx \Omega_i. \quad (17.31)$$

Дисперсионное уравнение для безынерционных волн при $\beta \gg 1$ и $|\kappa_p / \kappa_n| \approx 1/\beta$, как следует из (16.9), имеет вид

$$\omega^2 - (5/3)\Omega_i(\omega_i - 2\omega_{ni}) = 0. \quad (17.32)$$

Отсюда находим, что безынерционные возмущения могут раскачиваться с инкрементом порядка (17.31), если

$$0 < b < 2. \quad (17.33)$$

2. Возмущения с $k_z = 0$ при учете диссипативных эффектов. Уравнения (17.29), (17.33) приближены. В них в частности, опущены мнимые члены, соответствующие диссипации колебаний вследствие вязкости и теплопро-

водности ионов. Как следует из гл. 16, эти члены порядка ω/v_i и $(k_{\perp} \rho_i)^2 v_i / \omega$. Здесь мы ограничимся рассмотрением только эффектов порядка ω/v_i . Что касается инерционных волн, то они к такого рода эффектам не чувствительны, так что при учете членов порядка ω/v_i дисперсионное уравнение (17.29) остается неизменным. Учет же членов этого порядка в уравнении (17.32) для безынерционных волн приводит к следующему дисперсионному уравнению [оно вытекает из (П. 16.53)]:

$$\omega^2 - (5/3)\Omega_i(\Omega_i - 2\omega_{ni}) + i(0,96/10)(\omega^3/v_i)F(\omega/\Omega_i) = 0. \quad (17.34)$$

Здесь

$$F(x) = x(x - 0,59)(x + 1 - 1/\beta) + (42/41)[(8/3)x - 2 - (3/5)(x + 5)](x + 22,02). \quad (17.35)$$

С помощью (17.34) находим две дополнительные области неустойчивости безынерционных волн, расширяющие область (17.33)

$$2 < b < 2,6; \quad (17.36)$$

$$-0,1 < b < 0. \quad (17.37)$$

Инкремент этих неустойчивостей порядка

$$\text{Im } \omega \approx \Omega_i^2/v_i. \quad (17.38)$$

Он становится немалым по сравнению с $\text{Re } \omega$ при $v_i \approx \Omega_i$ — на пределах применимости столкновительного приближения.

3. Безынерционные возмущения с $k_z \approx (\omega v_e)^{1/2}/v_{Te}$. При $k_z \approx (\omega v_e)^{1/2}/v_{Te}$ становится существенна продольная электронная теплопроводность. Вместо (17.32) теперь, согласно (16.58), имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$[\omega^2 - (5/3)\Omega_i(\Omega_i - 2\omega_{ni})](\omega - 0,71\omega_{ni}) + i\Delta_e [(8/5)\omega^2 + 2(\omega_{ni} - \Omega_i)\omega + \omega_{ni}^2] = 0, \quad (17.39)$$

где $\Delta_e = (3,16/3)k_z^2 T/m_e v_e$.

В пределе $\Delta_e \rightarrow \infty$ отсюда получается квадратное уравнение

$$\omega^2 + (5/4)(\omega_{ni} - \Omega_i)\omega + (5/8)\omega_{ni}^2 = 0, \quad (17.40)$$

описывающее неустойчивость при

$$-0,3 < b < 2,3. \quad (17.41)$$

Этот интервал параметров b несколько шире, чем (17.33). В частности, он включает значение $b=0$, соответствующее случаю однородного магнитного поля, $B_0 = \text{const}$. При этом уравнение (17.40) есть не что иное, как уравнение (17.18) с $\gamma_0 = 5/3$.

Если параметр b не лежит в интервале (17.41), то как при $\Delta_e \rightarrow \infty$, так и при $\Delta_e \rightarrow 0$ корни уравнения (17.40) вещественны. Затухание или раскачка колебаний при этом определяется мнимыми членами, соответствующими эффекту конечной электронной теплопроводности. При этом обнаруживается диссипативная неустойчивость в области

$$-\infty < b < -0,3. \quad (17.42)$$

В частном случае $|b| \gg 1$ решение (17.39) имеет вид

$$\omega = 0,71 \frac{\omega_{ni} - 0,3i\Delta_e/b}{1 + (0,3\Delta_e/\Omega_i)^2}. \quad (17.43)$$

Если $k_z \approx (\Omega_i v_e)^{1/2}/v_{Te}$ и $b \approx -1$, то инкремент колебаний порядка ω_{ni} . С ростом $|b|$ и k_z он убывает.

4. Безынерционные возмущения с $(k_z v_{Ti})^2 \gg \omega v_i$. Переходим к рассмотрению возмущений с $(k_z v_{Ti})^2 \gg \omega v_i$ — наиболее коротковолновых вдоль \mathbf{B}_0 . В качестве исходных используем уравнения (П.17.55) — (П.17.59), полученные в приложении 2 к данной главе.

а. Ветвь колебаний. Поскольку при $\beta \gg 1$ величина κ_p мала по сравнению с κ_B и κ_T как $1/\beta$, то членами с κ_p в указанных уравнениях можно пренебречь. Предполагая также, что $\Lambda_1 \equiv (2/3) \cdot 3,9k_z^2 T/m_i v_i \gg \omega$, находим, что в нулевом приближении по малым параметрам ω/Δ_1 и $1/\beta$ уравнение продольного движения ионов (П.17.57) означает просто, что продольная вязкость ионов равна нулю:

$$\pi_{zz} = 0. \quad (17.44)$$

С помощью (17.44) и (П.17.58) получаем следующую связь между возмущенными величинами X , Y , Z и V_z , введенными в приложении 2:

$$(4/3)k_z V_z - 2,9i\Delta_1 X - (2/3)\kappa_B Y + (16/15)\Omega_i Z = 0. \quad (17.45)$$

Заметим, что член с $\Delta_1 X$ обусловлен зависимостью продольной вязкости ионов от продольного потока тепла (вторых производных температуры). Он одного порядка с другими членами уравнения (17.45) [чтобы убедиться в этом, π_{zz} следует выразить через X , Y , Z , используя уравнение теплового баланса ионов (П.17.59)].

Из уравнений (17.45), (П.17.55), П.17.56) и (П.17.59) в пренебрежении малыми членами порядка ω/Δ_1 и $1/\beta$ получается дисперсионное уравнение

$$\omega = 1,7\omega_{Ti}. \quad (17.46)$$

Как будет показано в следующем подпункте, эффекты порядка ω/Δ_1 могут приводить к возбуждению колебаний с этой частотой.

Рассмотрим смысл предположения применимости уравнения (17.44) и поясним, что означает пренебрежение градиентом давления по сравнению с градиентом тензора вязкости в уравнении продольного движения ионов, записанном в форме (П.17.46). По порядку величины из первого уравнения (П.17.45) имеем

$$\pi_{zz} \approx p_{0i}(\omega/v_i)B_z/B_0. \quad (17.47)$$

Кроме того, согласно (П.17.50),

$$p'_e + p'_{\perp i} = -B'_z B_0/4\pi. \quad (17.48)$$

Поэтому

$$(p'_e + p'_{\perp i})\pi_{zz} \approx v_i/\omega\beta. \quad (17.49)$$

Видно, что вязкость более важна, чем давление, если β достаточно велико:

$$\beta > v_i/\omega. \quad (17.50)$$

Поскольку $v_i \gg \omega$ (условие столкновительности), то из (17.49) следует также, что при $\beta \lesssim 1$ продольная вязкость может приводить лишь к малым поправкам (порядка ω/v_i) к членам, содержащим градиент давления,

б. Возбуждение колебаний типа (17.46). Таким же путем, как и в п. 4а, но с учетом членов порядка ω/Δ_1 вместо (17.46) получаем

$$\omega = 1,7\omega_{Ti} + i1,6(1 + 0,9) \omega_{Ti}^2 m_i v_i / k_z^2 T. \quad (17.51)$$

Отсюда следует, что возмущения нарастают, если

$$b > -1,1. \quad (17.52)$$

В частности, оказывается, что неустойчивой может быть плазма, находящаяся в однородном магнитном поле, $b=0$, т. е. $\nabla B_0=0$.

Интересно сравнить уравнение (17.51) с соответствующим результатом для бесстолкновительной плазмы, полученным в предположении $\omega \ll k_z v_{Ti}$ [см. уравнение (17.27)]:

$$\omega = 0,5\omega_{Ti} + i(\pi - 2 + 12) \omega_{Ti}^2 / 4 \sqrt{\pi} |k_z| v_{Ti}. \quad (17.53)$$

При $\omega < k_z v_{Ti}$ условие применимости бесстолкновительного приближения означает, что $v_i < k_z v_{Ti}$, тогда как столкновительное приближение, приводящее к (17.53), справедливо в области $v_i > k_z v_{Ti}$. Видно, что уравнения (17.51) и (17.53) качественно имеют одинаковую структуру и на пределах своей применимости, т. е. при $v_i \approx k_z v_{Ti}$, приводят к результатам одного и того же порядка величины.

При учете членов порядка $1/\beta$ вместо (17.51) получаем

$$\omega = 1,7\omega_{Ti} + i1,6(1 + 0,9) \omega_{Ti}^2 m_i v_i / k_z^2 T - i v_i / 0,7\beta. \quad (17.54)$$

Видно, что при достаточно больших k_z имеет место стабилизирующий эффект, связанный с членами порядка $1/\beta$. По порядку величины это дает следующее ограничение сверху на k_z , соответствующее нарастающим возмущениям:

$$k_z \lesssim \omega_{Ti} / c_A. \quad (17.55)$$

Мы рассмотрели предельный случай возмущений с $\omega < \Delta_1$. Инкремент нарастания таких возмущений мал по сравнению с их частотой, $\gamma < \text{Re } \omega$. Максимум инкремента соответствует случаю $\omega \approx \Delta_1$. При этом $\gamma \approx \text{Re } \omega$, а оптимальное k_z порядка

$$k_{z\text{опт}} \approx (\omega_{Ti} v_i)^{1/2} / v_{Ti}. \quad (17.56)$$

Поскольку предполагается $v_i > \omega_{Ti}$, то условие (17.56) означает, что $k_z > \omega_{Ti} / v_{Ti}$.

§ 17.5. Заключительные замечания о неустойчивостях плазмы большого давления

Изложенные выше результаты свидетельствуют о том, что в бессиловой или почти бессиловой плазме большого давления возможно развитие обширного семейства неустойчивостей, обусловленных градиентами плотности и температуры. Картина неустойчивостей такой плазмы зависит от наличия градиента магнитного поля и от направления этого градиента. Наиболее неустойчивой оказывается плазма с $\partial \ln B / \partial \ln n \geq 0$. Из оценок следует, что в этом случае теплопроводность плазмы может быть порядка боровской.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛ. 17

Приложение 1

Неустойчивости бессиловой плазмы большого давления

1. Исходные уравнения

Исследуем возмущения бесстолкновительной максвелловской плазмы с частотами $\omega \ll \omega_{vi}$, полагая $\nabla p_0 = 0$, $\nabla B_0 = 0$, $\partial \ln n / \partial \ln T = -1$, $\beta \gg 1$. При этих условиях возмущения описываются дисперсионным уравнением (13.50), в котором:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_{11} &= \sum_{i,e} \hat{\tau} \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \frac{1 - I_0(z) \exp(-z)}{z}; \\ \epsilon'_{12} &= -\epsilon'_{21} = -i \sum_{i,e} \hat{\tau} \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_B} (I_0 - I_1) \exp(-z); \\ \epsilon_{22} &= 2i \sqrt{\pi} \sum_{i,e} \hat{\tau} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} x W z (I_0 - I_1) \exp(-z); \\ \epsilon'_{31} &= \epsilon'_{13} = 0; \\ \epsilon_{23} &= -\epsilon_{32} = -i \sum_{i,e} \hat{\tau} \frac{k_{\perp}}{k_z} \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_B} (1 + i \sqrt{\pi} x W) (I_0 - I_1) \exp(-z); \\ \epsilon_{33} &= \sum_{i,e} \hat{\tau} \frac{2\omega_p^2}{\omega^2} x^2 (1 + i \sqrt{\pi} x W) I_0 \exp(-z). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.17.1})$$

Здесь оператор \hat{T} означает

$$\hat{T}F(n, T) = F - \frac{\omega_T}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial T} (TF) - n \frac{\partial F}{\partial n} \right]. \quad (\text{П.17.2})$$

В случае длинноволновых возмущений ($z_i \ll 1$) и $\beta \gg 1$ уравнение (П.17.1) приводится к виду

$$(\omega^2 - k_z^2 c_A^2) (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2) - (9/8) z_i \beta_i k_{\perp}^2 c^2 (1 - \omega_{Ti}/\omega)^2 \varepsilon_{33} = 0. \quad (\text{П.17.3})$$

Это уравнение анализируется в п. 2 и 3.

Исследуем также возмущения с $k_z = 0$. Им соответствует дисперсионное уравнение

$$\varepsilon'_{11} \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{12}{}^2 = 0, \quad (\text{П.17.4})$$

обсуждаемое в п. 4.

Кроме того, мы рассмотрим возмущения плазмы с конечным β и $z_i \rightarrow 0$, п. 5. Они описываются дисперсионным уравнением

$$(\varepsilon_{22} - N^2) \varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2 = 0. \quad (\text{П.17.5})$$

2. Неустойчивости плазмы большого давления в нулевом приближении по $(k_{\perp} \rho_i)^2$

В нулевом приближении по z_i уравнение (П.17.3) распадается на два:

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2; \quad (\text{П.17.6})$$

$$\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2 = 0. \quad (\text{П.17.7})$$

В этом приближении задача о неустойчивостях сводится к анализу уравнения (П.17.7). При $T_e = T_i$ это уравнение исследовалось в § 17.2. Согласно § 17.2, при $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$ уравнение (П.17.7) имеет комплексное решение (17.2), соответствующее неустойчивости гидродинамического типа, а при $\omega \ll k_z v_{Ti}$ — комплексное решение (17.3), соответствующее кинетической неустойчивости.

Покажем теперь, что обе эти неустойчивости подавляются, если T_e в несколько раз меньше T_i .

а. Возмущения с $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$. При $T_i \neq T_e$ вместо (17.2) из (П.17.7) следует

$$(1 - \omega_{Ti}/\omega) (1 - \tau \omega_{Ti}/\omega) + \tau/2 = 0, \quad (\text{П.17.8})$$

где $\tau \equiv T_e/T_i$. Решения этого уравнения таковы:

$$\omega = [\omega_{Ti}/(2 + \tau)] (1 \pm \tau \pm \sqrt{1 - 2\tau - \tau^2}). \quad (\text{П.17.9})$$

Частоты (П.17.9) вещественны при

$$\tau < \sqrt{2} - 1 = 0,41. \quad (\text{П.17.10})$$

Это — условие стабилизации гидродинамически неустойчивых возмущений.

При выполнении условия (П.17.10) необходимо рассмотреть возможность кинетической неустойчивости, связанной с резонансными электронами. Этот вопрос исследуем в приближении $T_e \ll T_i$. При этом дисперсионное уравнение (П.17.7) сводится к следующему:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{k_z^2 d_e^2} \left[1 + \frac{\omega_{Te}}{\omega} + \frac{i \sqrt{\pi} \omega}{|k_z| v_{Te}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_{Te}}{\omega} \right) \right] = 0. \quad (\text{П.17.11})$$

Оно имеет решение с $\omega = \text{Re } \omega + i \text{Im } \omega$, где

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &= -\omega_{Te} \equiv \omega_{pe}; \\ \text{Im } \omega &= \sqrt{\pi} \omega_{Te}^2 / 2 |k_z| v_{Te}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.17.12})$$

Инкремент максимален при $k_z v_{Te} \approx \omega_{Te}$, причем $\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{Te}$. Такого типа неустойчивость имеет место и в случае плазмы нулевого давления (см. гл. 6).

б. Возмущения с $\omega \ll k_z v_{Te}$. При $T_i \neq T_e$ из (П.17.7) получится следующее обобщение результата (17.3):

$$\omega = \omega_{Ti}/2 + i [\pi/(1 + 1/\tau) - 1] \omega_{Ti}^2 / 2 \sqrt{\pi} |k_z| v_{Ti}. \quad (\text{П.17.13})$$

Отсюда находим, что кинетическая неустойчивость, описываемая уравнением (17.3), не развивается, если

$$\tau < (\pi - 1)^{-1} \approx 0,45. \quad (\text{П.17.14})$$

3. Неустойчивости плазмы большого давления при конечных $(k_{\perp} \rho_i)^2$

При малых, но конечных z_i в уравнение (П.17.6) следует добавить малые мнимые члены, соответствующие взаимодействию альфвеновских колебаний с резонансными ионами. Вследствие такого взаимодействия может иметь место раскачка этих колебаний. Перейдем к ее исследованию.

При $\beta \gg 1$ и $\omega \approx k_z c_A$ параметр $\omega/k_z v_{Ti}$ оказывается малым. С учетом этого из (П.17.3) получаем

$$\omega^2 - k_z^2 c_A^2 + i (9/8 \sqrt{\pi}) z_i \omega |k_z| v_{Ti} (1 - \omega_{Ti}/\omega)^2 / (1 - \omega_{Ti}/2\omega) = 0. \quad (\text{П.17.15})$$

В отличие от (П.17.8), (П.17.13), сюда не входит температура электронов.

а. Возмущения с $z_i \ll \beta_i^{-1/2}$. Считая z_i достаточно малым, находим решение уравнения (П.17.15):

$$\text{Re } \omega = \pm k_z c_A;$$

$$\text{Im } \omega = -\frac{9z_i \sqrt{\beta_i}}{16 \sqrt{\pi}} |k_z| c_A \frac{(1 - \omega_{Ti}/\text{Re } \omega)^2}{1 - \omega_{Ti}/2\text{Re } \omega}. \quad (\text{П.17.16})$$

Видно, что инкремент одной из двух ветвей колебаний положителен, если

$$k_z < \omega_{Ti}/2c_A. \quad (\text{П.17.17})$$

Результат (П.17.16) необходимо уточнить, если частота альфвеновских колебаний совпадает с частотой колебаний, описываемых уравнением (П.17.13), что имеет место при

$$k_z = \omega_{Ti}/2c_A. \quad (\text{П.17.18})$$

Из (П.17.15) находим, что при таком пересечении ветвей колебаний инкремент оказывается наибольшим:

$$\text{Im } \omega \approx z_i^{1/2} \beta_i^{1/4} \omega_{Ti}. \quad (\text{П.17.19})$$

Принятое здесь предположение о малости членов порядка z_i оправдывается, если

$$z_i < \beta_i^{1/2}. \quad (\text{П.17.20})$$

б. *Возмущения с $z_i > \beta_i^{-1/2}$.* Согласно (П.17.16), (П.17.19), отношение инкремента к частоте у альфвеновских волн растет с ростом поперечного волнового числа k_\perp . При некоторых $k_\perp \rho_i < 1$ [см. (П.17.20)] оно становится порядка единицы. Рассмотрим теперь, что происходит при дальнейшем увеличении k_\perp .

При условии, обратном (П.17.20), и $k_z \approx \omega_{Ti}/c_A$ член уравнения (П.17.15), пропорциональный z_i , становится самым большим, так что это уравнение можно решать разложением в ряд по обратным степеням z_i . Тогда получаем

$$\omega = \omega_{Ti} \left\{ 1 \pm \frac{2}{3} \left[\frac{i\sqrt{\pi}}{z_i} \frac{\omega_{Ti}}{|k_z| v_{Ti}} \left(\frac{k_z^2 c_A^2}{\omega_{Ti}^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (\text{П.17.21})$$

Видно, что неустойчивость имеет место как при $k_z < \omega_{Ti}/c_A$, так и при $k_z > \omega_{Ti}/c_A$. Инкремент нарастает как при уменьшении, так и при увеличении k_z , т. е. можно говорить о двух областях неустойчивости. В области малых k_z инкремент сравнивается с частотой, если

$$k_z \approx \omega_{Ti}/c_A z_i \sqrt{\beta_i}. \quad (\text{П.17.22})$$

а в области больших k_z — при

$$k_z \approx \omega_{Ti} z_i \sqrt{\beta_i}/c_A. \quad (\text{П.17.23})$$

Эти результаты справедливы вплоть до $z_i \approx 1$.

4. Коротковолновые неустойчивости плазмы большого давления

При исследовании коротковолновых неустойчивостей, $z_i \gg 1$, будем полагать $k_z = 0$. При этом можно исходить из уравнения (П.17.4), которое при $z_i \gg 1$ означает

$$\left(1 - \frac{\omega_{Te}}{\omega} \right) \left(1 - \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega_{Te}}{\omega} \right) + \frac{T_i}{2T_e} = 0. \quad (\text{П.17.24})$$

Это уравнение с точностью до индексов i, e совпадает с (П.17.8). При $T_e = T_i$ оно описывает гидродинамическую неустойчивость типа (17.2). Такого рода неустойчивость не развивается, если, согласно (П.17.24), выполнен критерий, аналогичный (П.17.10):

$$T_i/T_e < \sqrt{2} - 1 = 0,41 \quad (\text{П.17.25})$$

5. Границы неустойчивостей при конечных β

Обсуждавшиеся в п. 2—4 неустойчивости в основном характерны только для плазмы с $\beta \gg 1$ и не развиваются, если β не слишком велико. Укажем граничные значения β , соответствующие некоторым из рассмотренных выше неустойчивостей.

а. *Граница длинноволновой и коротковолновой гидродинамических неустойчивостей.* При конечных β из (П.17.5) получается следующее обобщение уравнения (17.2):

$$\left(1 - \frac{\omega_{Ti}}{\omega} + \frac{1}{\beta} \right) \left(1 - \frac{\omega_{Ti}}{\omega} \right) + \frac{1}{2} = 0. \quad (\text{П.17.26})$$

Отсюда находим, что ω комплексно (условие неустойчивости), если только

$$\beta_i > 1/\sqrt{2}, \quad (\text{П.17.27})$$

что при $T_e = T_i$ означает $\beta > \sqrt{2}$.

Точно такой же результат получается и для коротковолновой гидродинамической неустойчивости, рассмотренной в п. 4.

б. *Граница длинноволновой кинетической неустойчивости.* Вместо (17.3) при конечных β из (П.17.5) следует

$$\omega = \frac{\omega_{Ti}}{2} + \frac{2i\omega^3}{\sqrt{\pi} |k_z| v_{Ti}} \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2 \beta} \right). \quad (\text{П.17.28})$$

Для неустойчивости необходимо

$$\beta > \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2 (\pi/2 - 1)}. \quad (\text{П.17.29})$$

Учитывая, что $k_z v_{Ti} \geq \omega$, заключаем, что при $\beta \approx 1$ условию (П.17.29) не может быть удовлетворено.

Приложение 2

Уравнения колебаний столкновительной плазмы большого давления при конечной вязкости ионов

Получим исходные уравнения для возмущений столкновительной плазмы с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , удовлетворяющими соотношениям

$$(m_e/m_i)^{1/2} v_i < \omega \lesssim k_z v_{Ti} \ll v_i; \quad k_{\perp} \rho_i \ll 1. \quad (\text{П.17.30})$$

При этих предположениях, позволяющих использовать жидкостное описание как электронной, так и ионной компоненты плазмы, имеем следующие уравнения, вытекающие из приложения 1 к гл. 16.

1. Уравнения для электронов

Электронная компонента плазмы ведет себя как среда с бесконечно большой теплопроводностью вдоль силовых линий магнитного поля:

$$\nabla_{\parallel} T_e = 0, \quad (\text{П.17.31})$$

где $\nabla_{\parallel} = \mathbf{e}_0 \nabla$; $\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}/B$; $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, штрих означает возмущения. В пренебрежении возмущенным магнитным полем \mathbf{B}'_{\perp} мы имели бы отсюда $T'_e = 0$. Однако мы считаем $\mathbf{B}'_{\perp} \neq 0$. Поэтому

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z + \mathbf{B}'_{\perp}/B_0, \quad (\text{П.17.32})$$

так что (П.17.31) означает

$$T'_e/T_{0e} = i(\kappa_T/k_z) B'_x/B_0, \quad (\text{П.17.33})$$

где $\kappa_T = \partial \ln T_0 / \partial x$.

Учитывая (П.17.31) и тот факт, что возмущенная скорость относительного движения электронов и ионов вдоль \mathbf{B}_0 , $V_{ze} - V_{zi}$ достаточно мала [$V_{ze} - V_{zi} \approx V_{ze} (v_e/\omega) (ck_{\perp}/\omega_{pe})^2$, см. § 16.4], уравнение продольного движения электронов можно записать в виде

$$-ik_z p'_e + e_e n_0 (E'_z - B'_x V_{0e}/c) = 0, \quad (\text{П.17.34})$$

где $V_{0e} = \kappa_{pe} T_{0e}/e_e B_0$ — скорость равновесного ларморовского тока электронов ($V_{0e} \parallel y$), $\kappa_p = \partial \ln p / \partial x$. Согласно условию квазинейтральности, плотность электронов равна плотности ионов и удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial n / \partial t + \text{div} (n \mathbf{V}_{\perp e}) + \partial (n V_{ze}) / \partial z = 0, \quad (\text{П.17.35})$$

где $\mathbf{V}_{\perp e}$ — часть вектора скорости электронов, перпендикулярная к \mathbf{B}_0 и равная

$$\mathbf{V}_{\perp e} = c [\mathbf{E}, \mathbf{e}_z] / B_0 + c [\mathbf{e}_z, \nabla p_e] / e_e n B. \quad (\text{П.17.36})$$

После подстановки (П.17.36) в (П.17.35) и линеаризации имеем [ср. с (16.43)]

$$-i\omega n' / n_0 + (\kappa_n - \kappa_B) c F_y / B_0 + i(\omega - \omega_{pe}^*) B'_z / B_0 + i\Omega_e p'_e / p_{0e} + ik_z V_z = 0. \quad (\text{П.17.37})$$

2. Уравнения для ионов

При учете вязкости уравнения продольного и поперечного движения ионов имеют вид

$$m_i n d_i V_{zi} / dt = -\partial (p_e + p_i) / \partial z - \partial \pi_{zz} / \partial x_{\alpha} - e_i n_0 (V_{0i} - V_{0e}) B_x / c; \quad (\text{П.17.38})$$

$$m_i n d_i \mathbf{V}_{\perp i} / dt = e_i (\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{V}_{\perp i}, \mathbf{B}] / c) - \nabla_{\perp} p_i - \text{div}_{\perp} \pi. \quad (\text{П.17.39})$$

Если в окончательных результатах, при учете членов порядка ω/v_i , пренебречь членами порядка $(k_{\perp} \rho_i)^2 v_i / \omega$, то, согласно приложению 1 к гл. 16, можно использовать следующие выражения для компонент тензора вязкости $\pi_{\alpha\beta}$, входящих в уравнение (П.17.38):

$$\left. \begin{aligned} \pi_{zz} &= -(p_i/v_i) (0,96 W_{zz}^{(1)} - 0,24 W_{zz}^{(2)}); \\ \pi_{zx} &= -(p_i/\omega_{Bi}) W_{yz}^{(1)}; \quad \pi_{zy} = (p_i/\omega_{Bi}) W_{xz}^{(1)}. \end{aligned} \right\} (\text{П.17.40})$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} W_{\lambda\mu}^{(1)} &= 2 \ll \nabla \cdot \mathbf{V}_i \gg_{\lambda\mu} + (4/5 p_i) \ll \nabla \cdot \mathbf{q}_i \gg_{\lambda\mu}; \\ W_{\lambda\mu}^{(2)} &= (2/p_i) \ll \mathbf{q}_i \nabla p_i - \nabla \cdot \mathbf{q}_i + \nabla \cdot \mathbf{q}_i^* \gg_{\lambda\mu} \end{aligned} \right\} (\text{П.17.41})$$

Векторы \mathbf{q}_i — поток тепла и \mathbf{q}_i^* — один из высших моментов функции распределения, аналогичный \mathbf{q}_i , в необходимом для нас приближении определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_i &= (5/2) (p_i/m_i \omega_{Bi}) [\mathbf{e}_0, \nabla T_i] - 3,9 (p_i/m_i v_i) \nabla_{\parallel} T_i; \\ \mathbf{q}_i^* &= (p_i/m_i v_i) \nabla_{\parallel} T_i. \end{aligned} \right\} (\text{П.17.42})$$

В правой части (П.17.41) должна быть подставлена поперечная скорость ионов $\mathbf{V}_{\perp i}$, которая удовлетворяет уравнению (П.17.39) без членов порядка ω/ω_{Bi} , $(k_{\perp} \rho_i)^2$, т. е.

$$\mathbf{V}_{\perp i} = c [\mathbf{E}, \mathbf{e}_z] / B_0 + c [\mathbf{e}_z, \nabla p_{\perp i}] / e_i n B. \quad (\text{П.17.43})$$

Здесь $p_{\perp i}$ — поперечное давление ионов:

$$p_{\perp i} = p_i - \pi_{zz}/2. \quad (\text{П.17.44})$$

В результате после линеаризации получаем следующие выражения для слагаемых уравнения (П.17.38), содержащих вязкость:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{zz} = i0,96 (p_{0i}/v_i) \{ & - (4/3) k_z V_{zi} - (2/3) [\omega - (13/5) \omega_{pi}^* + \\ & + (8/5) \omega_{nt}] B'_z/B_0 + i(2/3) \kappa_B c E_y/B_0 + (26/15) \Omega_i p'_{\perp i}/p_{0i} - \\ & - (16/15) \Omega_i n'/n_0 + i1,4 \Delta_1 [T'_i/T_{0i} - i(\kappa_T/k_z) B'_x/B_0] \}; \\ \partial \pi_{zx}/\partial x + \partial \pi_{zy}/\partial y = & i m_i n_0 (\Omega_i - \omega_{pi}^*) V_{zi} + (3/5) m_i n_0 \Delta_1 \times \\ & \times (\Omega_i/k_z) [T'_i/T_{0i} - i(\kappa_T/k_z) B'_x/B_0]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.17.45})$$

Здесь $\Delta_1 = (2/3) 3,9 k_z^2 T_i/m_i v_i$.

Используя уравнение (П.17.45), приводим линеаризованное уравнение (П.17.38) к виду

$$(\omega - \Omega_i) V_{zi} = k_z (p'_e + p'_i)/m_i n_0 + (3/2) k_z \pi_{zz}/m_i n_0 + i(3/5) \Delta_1 (\Omega_i/k_z) \times \\ \times [T'_i/T_{0i} - i(\kappa_T/k_z) B'_x/B_0] + i(e_i B'_z/m_i c) (V_{0i} - V_{0e}). \quad (\text{П.17.46})$$

Из ионных уравнений мы используем также уравнение теплового баланса

$$d_i p_i/dt + (5/3) p_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i + (2/3) \operatorname{div} \mathbf{q}_i = 0. \quad (\text{П.17.47})$$

В линейном приближении это означает [ср. с (16.43)]:

$$-i[\omega - (10/3) \Omega_i] p'_{\perp i}/p_{0i} + [\kappa_p - (5/3) \kappa_B] c E_y/B_0 - i(5/3) \Omega_i n'/n_0 + \\ + i(5/3) (\omega - \omega_{pi}^* - \omega_{Ti}) B'_z/B_0 + \Delta_1 [T'_i/T_{0i} - i(\kappa_T/k_z) B'_x/B_0] + \\ + i k_z V_{zi} = 0. \quad (\text{П.17.48})$$

Заметим, что если пренебрегается членами порядка ω/v_i , то в уравнении теплового баланса не должна учитываться и разность между p'_i и $p'_{\perp i}$. Это различие важно только в «силовых» уравнениях (таких, как уравнение баланса давлений).

3. Уравнение баланса давлений и инерционное уравнение

Чтобы получить замкнутую систему уравнений для возмущенных величин, необходимо также учесть уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c) \sum_{\alpha=i,e} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}. \quad (\text{П.17.49})$$

При подстановке в x -компоненту этого уравнения поперечных скоростей электронов и ионов из уравнений (П.17.36), (П.17.43) получаем

$$p'_e + p'_{\perp i} + B'_z B_0/4\pi = 0; \quad (\text{П.17.50})$$

это уравнение означает, что сумма давлений поля и плазмы есть константа (уравнение баланса давлений).

С помощью (П.17.49) можно получить еще одно полезное соотношение, взяв z -компоненту ротора уравнения (П.17.39) и исключив \mathbf{E}_{\perp} , используя (П.17.36):

$$\operatorname{rot}_z \{ m_i n d_i \mathbf{V}_i/dt + \nabla \pi + [\mathbf{B} [\nabla \mathbf{B}]]/4\pi \} = 0. \quad (\text{П.17.51})$$

В этом уравнении существенна инерция ионов, поэтому мы будем, как и в гл. 16, называть его инерционным уравнением. В компонентах тензора вязкости $\pi_{\alpha\beta}$ с $(\alpha, \beta) = (x, y)$, входящих в (П.17.51), достаточно знать только члены, соответствующие так называемой магнитной вязкости. Эти компоненты таковы:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xx} = -\pi_{yy} = & - (p_i/2\omega_{Bi}) W_{xy}^{(1)}; \\ \pi_{xy} = \pi_{yz} = & (p_i/4\omega_{Bi}) (W_{xx}^{(1)} - W_{yy}^{(1)}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.17.52})$$

После подстановки (П.17.52) в (П.17.51) и линеаризации получаем [ср. с (16.48)]:

$$(\omega - 3\Omega_i) p'_i/p_{0i} + (3/2) \Omega_i n'/n_0 + i(\kappa_B/\Omega_i) [\omega - (3/2) \Omega_i] c E_y/B_0 - \\ - k_z V_z - (\omega - \omega_{pi}^* - \omega_{Ti}) B'_z/2B_0 + i(3/5) \Delta_1 [T'_i/T_{0i} - \\ - i(\kappa_T/k_z) B'_x/B_0] + i(\kappa_B k_z^2 c^2/\Omega_i) B'_x/B_0 = 0. \quad (\text{П.17.53})$$

4. Система исходных уравнений в канонических переменных

Возьмем приведенные выше уравнения в переменных X, Y, Z (см. гл. 16):

$$\left. \begin{aligned} X = & (p'_{\perp i} - p'_e)/2n_0 T_{0i}; \\ Y = & i c E_y/B_0 + (\omega/\kappa_p) (p'_{\perp i} - p'_e)/2n_0 T_{0i}; \\ Z = & n'/n_0 - (\kappa_n/\kappa_p) (p'_{\perp i} - p'_e)/2n_0 T_{0i}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.17.54})$$

(Полагается $T_{0e} = T_{0i} = T_0$.) Тогда приходим к следующей системе уравнений:

1) уравнение продольного движения электронов [уравнение (П.17.34)]

$$(\omega - \omega_{pe}) X + \kappa_T Y + (\omega - \omega_{pe}^*) Z = 0; \quad (\text{П.17.55})$$

2) уравнение непрерывности электронов [уравнение (П.17.37)]

$$\Omega_i X + (\kappa_B - \kappa_n) Y - \omega Z + k_z V_z = 0; \quad (\text{П.17.56})$$

3) уравнение продольного движения ионов [уравнение (П.17.46)]

$$(\omega - \Omega_i) k_z V_z = (3/2) k_z^2 \pi_{zz}/m_i n_0 + 2(\kappa_p/\kappa_T) k_z^2 (T_0/m_i) (X + Z) - \\ - i(6/5) \Delta_1 \Omega_i X; \quad (\text{П.17.57})$$

4) уравнение для продольной вязкости ионов [первое уравнение (П.17.45)]

$$\pi_{zz} = -i0,96 (\rho_{0i}/v_i) \{ (4/3) k_z V_z - [(26/15) \Omega_i + 2,9 i \Delta_i] X - (2/3) \kappa_B Y + (16/15) \Omega_i Z \}; \quad (\text{П.17.58})$$

5) уравнение теплового баланса ионов [уравнение (П.17.48)]

$$[\omega - (10/3) \Omega_i - 2i \Delta_i] X + [\kappa_p - (5/3) \kappa_B] Y + (5/3) \Omega_i Z - (5/3) k_z V_z = 0; \quad (\text{П.17.59})$$

6) инерционное уравнение [уравнение (П.17.53)]

$$[\omega^2 - \omega (\Omega_i + \omega_{pi}^*) + \Omega_i (\omega_{pe}^* + \omega_{Ti}) - k_z^2 c_A^2] B_z'/B_0 + \Omega_i \{ k_z V_z - [\omega - 3\Omega_i + i(6/5) \Delta_i - k_z^2 c_A^2 / \omega_{Ti}] X - (\kappa_B / \Omega_i) [\omega - (3/2) \Omega_i] Y - [(3/2) \Omega_i - k_z^2 c_A^2 / \omega_{Ti}] Z \} = 0. \quad (\text{П.17.60})$$

5. Обсуждение структуры уравнений (П.17.55) — (П.17.59)

Заметим, что в первые пять этих уравнений входят величины X , Y , Z , V_z и π_{zz} [уравнения (П.17.55) — (П.17.59)], тогда как величина B_z' в этих уравнениях, записанных в соответствующих переменных, отсутствует. Поэтому если детерминант системы (П.17.55) — (П.17.59) приравнять нулю, то получится дисперсионное уравнение для возмущений с ненулевыми X , Y , Z , V_z , π_{zz} (ср. с гл. 16). Поскольку такое дисперсионное уравнение получается без использования инерционного уравнения (П.17.60), то соответствующие возмущения, аналогично гл. 16, будем называть безынерционными. В этом случае инерционное уравнение связывает B_z' со всеми остальными возмущенными величинами. Видно, что в безынерционных возмущениях B_z' не равно нулю, так что при этом

$$(X, Y, Z, V_z, \pi_{zz}, B_z') \neq 0. \quad (\text{П.17.61})$$

Система уравнений (П.17.55) — (П.17.60) может удовлетворяться также при

$$B_z' \neq 0; \quad (X, Y, Z, V_z, \pi_{zz}) = 0. \quad (\text{П.17.62})$$

При этом дисперсионное уравнение получается приравниванием нулю коэффициента при B_z' в уравнении (П.17.60):

$$\omega^2 - \omega (\Omega_i + \omega_{pi}^*) - \Omega_i (\omega_{pe}^* + \omega_{Ti}) - k_z^2 c_A^2 = 0. \quad (\text{П.17.63})$$

Это инерционные возмущения, или волны альфвеновского типа.

Заметим, что в предельном случае однородной плазмы, когда $\kappa_B = \kappa_n = \kappa_p = \kappa_T = 0$, уравнение (П.17.63) приводит к хорошо известному закону дисперсии для альфвеновских волн:

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2 \quad (\text{П.17.64})$$

и соответствует возмущениям, в которых магнитные силовые линии изгибаются ($B_x' \neq 0$) без сжатия или разрежения ($B_z' = 0$) и без возмущений плотности и температуры (и, следовательно, без возмущений давления), т. е. $n' = T' = p' = 0$. В отличие от этого, возмущения альфвеновского типа в неоднородной плазме таковы, что B_z' , n' , T' , p' , как и B_x' , отличны от нуля, причем, согласно (П.17.33), (П.17.50), (П.17.54) и (П.17.62):

$$\left. \begin{aligned} B_z' &= i (\kappa_B / k_z) B_x'; \\ n' &= i n_0 (\kappa_n / k_z) B_x' / B_0; \\ T_e' = T_i' = T' &= i T_0 (\kappa_T / k_z) B_x' / B_0; \\ p_{\perp i}' = p_e' = p' &= i n_0 T_0 (\kappa_p / k_z) B_x' / B_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.17.65})$$

Видно также, что возмущения типа (П.17.62) (возмущения альфвеновского типа) не чувствительны к интересующим нас эффектам столкновительной вязкости и теплопроводности (это следовало также из гл. 16), причем дисперсионное уравнение (П.17.63) оказывается таким же, как и в случае возмущений столкновительной плазмы с $V_z = 0$ (см. гл. 16) и возмущений бесстолкновительной плазмы (см. гл. 15). Такое дисперсионное уравнение исследовалось в гл. 15 и 16. Поэтому необходимо дополнительное исследование только возмущений типа (П.17.62). Этот анализ приводится в п. 4 § 17.4.

Приложение 3

Раскачка альфвеновских волн в плазме большого давления, находящейся в неоднородном магнитном поле

1. Общие замечания

Согласно (13.53), (13.66), альфвеновские волны в приближении $(k_{\perp} \rho_i)^2 \rightarrow 0$ описываются дисперсионным уравнением

$$Q^{(0)} \equiv \frac{c^2}{c_A^2} (\omega^2 - \omega \Omega_i - \omega_{ni} \Omega_i - k_z^2 c_A^2) = 0. \quad (\text{П.17.66})$$

Здесь обозначения такие же, как и в § 17.3. Предполагается $\beta \gg 1$ и опущены члены порядка $1/\beta$.

При $\nabla B_0 = 0$ из (П.17.66) следует закон дисперсии обычных альфвеновских волн:

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2. \quad (\text{П.17.67})$$

При $k_z = 0$ и $\kappa_B / \kappa_n = b \ll 1$ вместо этого имеем

$$\omega^2 = \omega_{ni} \Omega_i. \quad (\text{П.17.68})$$

Такие колебания, как и (П.17.67), обладают вещественной частотой, если

$$b > 0. \quad (\text{П.17.69})$$

Если же $b < 0$, то колебания типа (П.17.68) имеют чисто мнимую частоту, что соответствует гидродинамической неустойчивости с инкрементом

$$\gamma = \sqrt{-b} |\omega_{ni}|. \quad (\text{П.17.70})$$

При еще более сильной неоднородности магнитного поля, $|b| \gg 1$, и $k_z c_A \ll \Omega$, уравнение (П.17.66) имеет вещественные корни разного порядка:

большой

$$\omega_1 = \Omega_i \quad (\text{П.17.71})$$

и малый

$$\omega_2 = -\omega_{ni} - k_z^2 c_A^2 / \Omega_i. \quad (\text{П.17.72})$$

Целью нашего последующего анализа будет выяснение возможности раскачки колебаний типа (П.17.66) вследствие не учтенных в (П.17.66) эффектов порядка $(k_\perp \rho_i)^2$. При таком анализе предполагается, что корни (П.17.66) вещественны.

Дисперсионное уравнение для волн альфвеновского типа с учетом членов порядка $(k_\perp \rho_i)^2$ можно представить как обобщение (П.17.66) [см. уравнение (13.65)]

$$Q^{(0)} + Q^{(1)} = 0, \quad (\text{П.17.73})$$

где $Q^{(1)}$ — некоторая комплексная функция ω и k , общий вид которой для случая бесстолкновительной плазмы определяется соотношением (13.67), а для случая столкновительной будет дан ниже. Мнимая часть этой функции определяет инкремент колебаний:

$$\gamma = - \frac{\text{Im } Q^{(1)}}{\partial Q^{(0)} / \partial \omega}. \quad (\text{П.17.74})$$

Формула (П.17.74) по смыслу аналогична хорошо известной формуле теории колебаний однородной плазмы [см. т. 1, уравнение (2.17)]:

$$\gamma = - \frac{\text{Im } \epsilon}{\partial \text{Re } \epsilon / \partial \omega}, \quad (\text{П.17.75})$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость. Это соотношение можно трактовать в энергетических терминах: величину $\omega \partial \text{Re } \epsilon / \partial \omega$ можно понимать как энергию колебаний (в единицах $E^2/8\pi$), а $\omega \text{Im } \epsilon$ — как скорость диссипации энергии колебаний. Аналогичным образом можно трактовать и уравнение (П.17.74). Тогда роль безразмерной энергии колебаний будет играть величина

$$W = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Q^{(0)}}{\partial \omega}. \quad (\text{П.17.76})$$

При $Q^{(0)}$ вида (П.17.66) эта величина равна

$$W = (c^2/c_A^2) (2 - \Omega_i/\omega). \quad (\text{П.17.77})$$

Из (П.17.77) вытекает интересное следствие: энергия волн альфвеновского типа отрицательна, если

$$\Omega_i/\omega > 2. \quad (\text{П.17.78})$$

Этому условию удовлетворяет, в частности, корень (П.17.72) при $b < 0$, полученный в предположении $|b| \gg 1$.

Используя (П.17.66) и (П.17.78), найдем, что волны с $W < 0$ существуют, если

$$b < -k_z^2 c_A^2 / \omega_{ni}^2 \quad (\text{П.17.79})$$

и если, кроме того, удовлетворяется неравенство

$$(b + 2)^2 > 4 [1 - (k_z c_A / \omega_{ni})^2], \quad (\text{П.17.80})$$

которое следует учитывать при $|k_z c_A| < |\omega_{ni}|$.

Исследуемые ниже неустойчивости плазмы с большим отрицательным b связаны с раскачкой волн с $W < 0$. В случае $b = 0$, $W > 0$ неустойчивости обусловлены отрицательной диссипацией $\omega \text{Im } Q^{(1)} < 0$.

2. Неустойчивости бесстолкновительной плазмы

Рассмотрим возмущения с

$$k_z v_{Ti} \gg (\omega, \Omega_i). \quad (\text{П.17.81})$$

При этом с учетом $\beta \gg 1$ из (13.67) следует

$$\frac{c_A^2}{c^2} \text{Im } Q^{(1)} = \frac{9}{8\sqrt{\pi}} (k_\perp \rho_i)^2 |k_z| v_{Ti} \frac{(1 + \omega_n/\omega)^2}{1 + \omega_n/2\omega}. \quad (\text{П.17.82})$$

Видно, что $\omega \text{Im } Q^{(1)} < 0$ (отрицательная диссипация) при $-1/2 < \omega/\omega_{ni} < 0$. (П.17.83)

Вследствие отрицательной диссипации должны раскачиваться волны с положительной энергией, если их частота удовлетворяет условию (П.17.83).

Случай $b=0$ был рассмотрен в приложении 1 к данной главе. Поэтому ниже ограничимся анализом случая $|b| \gg 1$.

При $|b| \gg 1$ в (П.17.82) следует подставлять корни $\omega = \omega_{1,2}$, определяемые выражениями (П.17.71), (П.17.72).

В случае корня $\omega = \omega_1$ имеем $\omega \text{Im } Q^{(1)} > 0$, $W > 0$, так что колебания типа (П.17.71) не раскачиваются. Если $\omega = \omega_2$ и $(k_z c_A)^2 < \omega_{ni}^2 |b|$, то при любом знаке b $\omega \text{Im } Q^{(1)} > 0$ (положительная диссипация). Знак энергии колебаний зависит от знака b , причем $W < 0$, если $b < 0$ (отрицательная энергия).

Таким образом, с корнем $\omega = \omega_2$ связана неустойчивость волн с отрицательной энергией. Эта неустойчивость имеет место в плазме с

$$\partial \ln B / \partial \ln n < 0. \quad (\text{П.17.84})$$

Из (П.17.66), (П.17.74), (П.17.82) находим, что инкремент этой неустойчивости порядка

$$\gamma \approx (k_{\perp} \rho_i)^2 k_z v_{Ti}. \quad (\text{П.17.85})$$

Он максимален при

$$k_z \approx \sqrt{|b|} \omega_{ni} / c_A, \quad (\text{П.17.86})$$

и при этом

$$\gamma \approx (k_{\perp} \rho_i)^2 \sqrt{\beta |b|} \omega_{ni}. \quad (\text{П.17.87})$$

Обсуждаемые в этом пункте неустойчивости обусловлены взаимодействием с колебаниями резонансных понов и потому являются существенно кинетическими. Однако, как будет показано в следующем пункте, эти неустойчивости имеют аналог в столкновительной плазме, когда эффекты резонансных частиц отсутствуют.

3. Неустойчивости столкновительной плазмы

Рассматриваем возмущения с k_z такими, что

$$k_z^2 v_{Ti}^2 / v_i \gg (\omega, \Omega_i). \quad (\text{П.17.88})$$

Дисперсионное уравнение для альфвеновских волн в условиях (П.17.88) можно получить, используя общие гидродинамические уравнения с выражениями для тензора вязкости и потока тепла, приведенными в приложении 1 к гл. 16. Это дисперсионное уравнение можно записать в виде (П.17.73), где $Q^{(0)}$ определяется формулой (П.17.66), а функция $\text{Im} Q^{(1)}$ имеет вид

$$\frac{c_A^2}{c^2} \text{Im} Q^{(1)} = \frac{1}{3} (k_{\perp} \rho_i)^2 \times \\ \times \frac{\omega v_i [0,9 + 2,4 \omega_{ni} / \omega + 0,1 (\omega_{ni} / \omega)^2]}{1 + 1,7 \omega_{ni} / \omega}. \quad (\text{П.17.89})$$

При $b = 0$ и $k_z c_A \ll \omega_{ni}$ из (П.17.66), (П.17.73), (П.17.89) следует, что плазма неустойчива относительно возмущений с частотой (П.17.67) и инкрементом

$$\gamma = \frac{1}{204} (k_{\perp} \rho_i)^2 \frac{v_i |\omega_{ni}|}{|k_z| v_{Ti}} \sqrt{2\beta}. \quad (\text{П.17.90})$$

Видно, что при $k_z v_{Ti} \approx v_i$ выражения (П.17.90) и (П.17.16) качественно совпадают. Уравнение (П.17.90), как и уравнение (П.17.16), описывает раскачку волн положительной энергии ($W > 0$) из-за эффекта отрицательной диссипации ($\omega \text{Im} Q^{(1)} < 0$). Однако теперь эта диссипация обусловлена парными столкновениями между ионами, а не взаимодействием резонансных ионов с колебаниями.

При $|b| \gg 1$ и $(k_z c_A)^2 \ll |b| \omega_{ni}^2$ вместо (П.17.90) получается следующее выражение для мнимой части частоты (при $\text{Re} \omega = \omega_2$):

$$\gamma = -(2/3b) (k_{\perp} \rho_i)^2 v_i. \quad (\text{П.17,91})$$

Отсюда видно, что при $\partial \ln B / \partial \ln n < 0$ имеет место неустойчивость. Эти результаты аналогичны (П.17.84), (П.17.85).

Библиографический обзор к гл. 17

1. Михайловский А. Б. Неустойчивость неоднородной плазмы большого давления в однородном магнитном поле. — Докл. АН СССР, 1970, т. 192, с. 74.
 2. Михайловский А. Б. Устойчивость плазмы большого давления с малым градиентом давления. — Журн. техн. физ., 1970, т. 40, с. 2050.
 3. Михайловский А. Б., Цыпин В. С. Неустойчивость энтропийных волн из-за гирорелаксационного эффекта в плазме конечного давления. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1970, т. 59, с. 524.
 4. Михайловский А. Б., Цыпин В. С. Неустойчивости плазмы конечного и большого давления с конечной электронной теплопроводностью. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1970, т. 59, с. 1694.
 5. Mikhailovsky A. B., Tsypin V. S. Transport equations and gradient instabilities in a high-pressure collisional plasma. — Plasma Phys., 1971, v. 13, p. 785.
 6. Mikhailovsky A. B., Fridman A. M. Instabilities of force-free high beta plasma. — Plasma Phys., 1971, v. 13, p. 1163.
 7. Mikhailovsky A. B., Fridman A. M., Tsypin V. S. Instabilities of a high-pressure plasma contained by a dense blanket of neutral gas. — Nucl. Fusion, 1971, v. 11, p. 123.
 8. Mikhailovsky A. B., Tsypin V. S. Micro-instabilities of high-pressure plasma associated with dependence of the ion viscosity on the derivatives of the longitudinal thermal flux. — Plasma Phys., 1972, v. 14, p. 449.
- В основу гл. 17 легли результаты, полученные в работах [1—8].

Адиабатические ловушки 48
 Альфвеновская неустойчивость 244
 — струи плазмы 260
 Альфвеновские волны 243, 266
 Аномальная диффузия 219
 Асимметрия скоростная 77
 Бессилловая плазма 337
 Ветви колебаний 244, 100
 — низкочастотных 100
 Взаимодействие пучка с плазмой 52
 — резонансное 63
 Винтовое магнитное поле 219
 Возмущения 136
 — в ограниченных системах 32
 Возмущенная функция распределе-
 ния 12
 Волновой пакет 21
 Волны альфвеновские 243, 266
 — ионно-звуковые 105
 — магнитно-звуковые 239
 — Церковникова 264
 — циклотронные 79
 — зитронийные 316
 Высокочастотное поле 183
 Вязкость 130
 Гауссово распределение 176
 Гидродинамика одножидкостная 45
 — трактовки 129
 — рассмотрение 45
 Гирорелаксационный эффект 316
 Горячие электроны 84
 — ионы 79
 Гравитационное поле 165
 Градиентная раскачка 68
 — альфвеновских волн 281
 Градиент скорости 45
 Граница неустойчивости 249, 341
 Дельта-функциональное распределе-
 ние 89
 Дисперсионное уравнение 57
 — — — непотенциальных возмущений
 233, 236
 Диссипативные эффекты 332
 Диэлектрическая проницаемость 12
 Жидкость несжимаемая 297
 Затухание колебаний 269
 Ионно-циклотронная неустойчивость
 80
 Инерционно-диссипативная неустой-
 чивость 150
 Инерционное уравнение 344
 Инерционные волны 295
 Интеграл столкновений 144
 Канонические переменные 345
 «Квазиклассическое» приближение 21
 Квазимоды 222
 Кельвина—Гельмгольца неустойчи-
 вость 43
 Кинетический метод 219
 Классификация типов неустойчивых
 плазм 180
 Конвекция 53
 — зарядов 53
 — тепла 68
 Конечная проводимость 251
 Конечное β 10
 Коротковолновые возмущения 103, 106
 — неустойчивости 103, 106
 Кривизна силовых линий 5
 Крупномасштабные возмущения 307
 Ларморовские потоки 69
 Ларморовский радиус 71
 — — — конечный 141
 — — — нулевой 312
 Магнитодрейфовая ветвь колебаний
 285
 Магнитный дрейф 231
 Макроскопические уравнения 119

Малый градиент давления 329
 Мелкомасштабные возмущения 306
 Метод кинетический 219
 — поверхностных волн 30
 — энергетический 169
 Механизм стабилизации широм 216
 Механизмы неустойчивостей 52
 Модельный интеграл столкновений 140
 Мультипольные системы 221
 Неоднородная плотность 98
 — температура 257
 Непотенциальные возмущения 227
 — неустойчивости 224
 Неустойчивости анизотропные 47
 — плазмы бессилловой 337
 — — — бесстолкновительной 98, 263
 — — — большого давления 324
 — — — столкновительной 150
 — пространства скоростей 9
 — пучковые 9
 Неустойчивость безынерционная 162,
 283
 — высокочастотная 83
 — вязкостная 154
 — гидродинамическая 99, 154
 — гравитационно-диссипативная
 182, 206
 — гравитационно-кинетическая 180
 — градиентно-циклотронная 79, 272
 — двокотронная 199
 — диссипативная 158
 — желобковая 165
 — — плазмы конечного давления 305
 — инерционно-диссипативная 150
 — — непотенциальная 252
 — ионно-циклотронная 80
 — Кельвина—Гельмгольца 43
 — конусная 48
 — коротковолновая 103, 106
 — теплообменная 155
 — теплопроводностная 155
 — термосильная 152, 156
 — токово-конвективная 205
 — центробежная 189
 — — высокочастотная 196
 Области неустойчивости 305
 Оболочка нейтрального газа 325
 Общие выражения для ϵ_{\perp} 333
 Одножидкостная гидродинамика 45
 Определение шира 213
 Пакет волновой 21
 Плазма без магнитного поля 9
 — большого давления 324, 326, 329,
 337, 341, 342, 347
 — — — бессиллова 337
 — — — столкновительная 332
 — в адиабатических ловушках 97
 — — высокочастотном поле 183
 — — гравитационном поле 165
 — — магнитном поле 35
 — — поле с широм 213
 — — скрещенных полях 188
 — конечного давления 232, 236, 272,
 305
 — — — бесстолкновительная 263, 282
 — — — низкого давления 233, 242
 — — — с неоднородной температурой
 257
 — — — столкновительная 250, 307
 — плотная 260
 — полностью ионизованная 143
 — почти бесстолкновительная 150
 — разреженная 177
 — с горячими ионами 79
 — — — электронами 84
 — — δ -функциональным распределе-
 нием 89
 — сильностолкновительная 156
 — с конечным β 279
 — — — ларморовским радиусом 178
 — слабоионизованная 202
 — — в скрещенных полях 207
 — слабонеоднородная бесстолкнови-
 тельная 98
 — с немаксвелловским распределени-
 ем 88
 — — неоднородной плотностью 98, 243
 — — — температурой 105
 — — — неоднородным профилем скоро-
 сти 192, 260
 — — — нулевым ларморовским радиу-
 сом 177
 — — — примесных холодных ионов 113
 — — — поперечным током 95
 — — — продольным током 93, 109
 — — — резкой границей 167
 — — — столкновительная 116, 150, 252, 350
 — — — с неоднородной плотностью 152
 — — — температурой 154
 — — — током 161
 — холодная 58
 Положительный столб 212
 Поперечная инерция 125
 — — — вязкость 125
 Поперечный ток 95
 Пороги неустойчивостей 41
 Поток с неоднородным профилем
 скорости 30, 42
 — радиально-неоднородный 36
 Примеси 280
 Продольный ток 93
 Радиально-неоднородный поток 36
 Размытое распределение 89
 Разреженная плазма 219, 222
 Распределение гауссова 176
 — немаксвелловское 88
 — размытое 89
 Резкая граница 167
 Резкий спад плотности 49
 Резонансные электроны 101
 Роль неоднородности плазмы 47
 Рэлея теорема 192
 Скачкообразный профиль скорости 62
 Стабилизация 247
 — высших гармоник 276
 — вязкостью 152
 — конечным ларморовским радиусом
 171
 — конусоградиентной неустойчивости
 277
 — отрицательным g 180
 — широм 216

Струя плазмы 111	Чепмена-Эпскога метод 129, 143
Тиринг-мода 221	Численные расчеты 51
Условие несжимаемости 46	Шир 213
Усредненная ВЧ-сила 183	Энергия колебаний 17
Уравнение баланса давлений 344	Энтропийные волны 293
— переноса 307	Эффект гирорелаксационный 316

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ	
ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЫ НА	
НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВА СКОРОСТЕЙ	
Глава 1. Пучковые неустойчивости неоднородной плазмы в	
отсутствие магнитного поля	9
§ 1.1. Введение	9
§ 1.2. Стационарная функция распределения неоднород-	
ной плазмы	10
§ 1.3. Диэлектрическая проницаемость слабонеоднород-	
ной плазмы в отсутствие магнитного поля	12
§ 1.4. Пределы применимости приближения однородной	
плазмы в задачах об устойчивости	17
§ 1.5. Волновой пакет в неоднородной плазме. Квази-	
классическое приближение	21
§ 1.6. Неустойчивость потока с неоднородным профилем	
скорости. Метод поверхностных волн	30
§ 1.7. Неустойчивость электронного потока, ограничен-	
ного катодом и анодом. Связь между элементар-	
ными типами возмущений в ограниченных систе-	
мах	32
Библиографический обзор к гл. 1	35
Глава 2. Пучковые неустойчивости неоднородной плазмы	
в магнитном поле	35
§ 2.1 Введение	35
§ 2.2. Раскачка собственных колебаний плазмы ради-	
ально-неоднородным электронным потоком	36
§ 2.3. Пороги пучковых неустойчивостей в ограниченной	
плазме, находящейся в сильном магнитном поле	41
§ 2.4. Электронный поток с неоднородным профилем	
скорости в продольном магнитном поле	42
§ 2.5. Раскачка альфвеновских волн в плазме с неод-	
нородным профилем скорости (неустойчивость	
Кельвина — Гельмгольца)	43
Библиографический обзор к гл. 2	47

Глава 3. Влияние неоднородности плазмы и магнитного поля на конусные и анизотропные неустойчивости	47
§ 3.1. Введение	47
§ 3.2. Высокочастотная конусная неустойчивость плазмы конечной длины	48
Библиографический обзор к гл. 3	51
ЧАСТЬ ВТОРАЯ	
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ (ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ) ГРАДИЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ПРЯМОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ	53
Глава 4. Градиентные механизмы раскачки колебаний и их роль в процессах взаимодействия пучков с плазмой	53
§ 4.1. Конвекция зарядов поперек магнитного поля из-за дрейфа в скрещенных полях	53
§ 4.2. Конвективная раскачка колебаний холодной плазмы «холодным пучком» с неоднородной плотностью	58
§ 4.3. Неустойчивость потока с неоднородным профилем скорости	61
§ 4.4. Роль эффекта конвекции в процессах резонансного взаимодействия частиц с колебаниями	63
§ 4.5. Конвекция тепла и неустойчивость из-за градиента температуры	68
§ 4.6. Роль ларморовских потоков (угловой асимметрии стационарной функции распределения)	69
§ 4.7. Общие выражения для ϵ_0 . Относительная роль конвекции и ларморовских потоков	73
Библиографический обзор к гл. 4	78
Глава 5. Ионно-циклотронные и высокочастотные неустойчивости плазмы с конечным ларморовским радиусом ионов и электронов	79
§ 5.1. Плазма с горячими максвелловскими ионами	79
§ 5.2. Плазма с горячими максвелловскими электронами	84
§ 5.3. Плазма с немаксвелловским распределением ионов по поперечным скоростям. Конусно-градиентная неустойчивость	88
§ 5.4. Плазма с продольным током	93
§ 5.5. Плазма с поперечным током	95
Библиографический обзор к гл. 5.	97
Глава 6. Слабонеоднородная бесстолкновительная плазма	98
§ 6.1. Плазма с неоднородной плотностью	98
§ 6.2. Плазма с неоднородной температурой	105
§ 6.3. Плазма с продольным током	109
§ 6.4. Струя плазмы с неоднородным профилем скорости	111
§ 6.5. Плазма с примесью холодных ионов	113
Библиографический обзор к гл. 6	114

Глава 7. Уравнения колебаний столкновительной плазмы	116
§ 7.1. Пределы применимости бесстолкновительного приближения и диэлектрическая проницаемость почти бесстолкновительной плазмы	116
§ 7.2. Макроскопические уравнения столкновительной плазмы	120
§ 7.3. Макроскопические уравнения с учетом поперечной инерции и поперечной вязкости ионов	125
§ 7.4. Гидродинамическая трактовка макроскопических уравнений § 7.2 и 7.3	129
§ 7.5. Дисперсионные уравнения в пренебрежении малыми диссипативными эффектами	134
§ 7.6. Дисперсионные уравнения с учетом малых диссипативных эффектов	138
§ 7.7. Использование модельного интеграла столкновений	140
Приложение к гл. 7. Метод Чепмена — Энскога в приложении к полностью ионизованной плазме в отсутствие магнитного поля	143
Библиографический обзор к гл. 7	148
Глава 8. Неустойчивости столкновительной плазмы	150
§ 8.1. Неустойчивости почти бесстолкновительной плазмы	150
§ 8.2. Столкновительная плазма с неоднородной плотностью	152
§ 8.3. Столкновительная плазма с неоднородной температурой	154
§ 8.4. Сильностолкновительная плазма	156
§ 8.5. Суммирование результатов, полученных в § 8.2—8.4	159
§ 8.6. Столкновительная плазма с током	161
Библиографический обзор к гл. 8	163
Глава 9. Плазма в гравитационном поле	165
§ 9.1. Желобковая неустойчивость плотной плазмы	165
§ 9.2. Эффект конечного ларморовского радиуса ионов	171
§ 9.3. Желобковая неустойчивость разреженной плазмы	177
§ 9.4. Стабилизирующее влияние проводящих торцов	178
§ 9.5. Стабилизация бесстолкновительной плазмы отрицательным g . Гравитационно-кинетическая неустойчивость при $g > 0$	180
§ 9.6. Стабилизация столкновительной плазмы отрицательным g . Гравитационно-диссипативная неустойчивость при $g > 0$	182
§ 9.7. Плазма в высокочастотном поле	183
Библиографический обзор к гл. 9	185
Глава 10. Плазма в скрещенных электрическом и магнитном полях	188
§ 10.1. Низкочастотная центробежная неустойчивость	188
§ 10.2. Низкочастотная неустойчивость плазмы с неоднородным профилем скорости	192

§ 10.3. Влияние температуры ионов на низкочастотные неустойчивости	195
§ 10.4. Ионно-циклотронные и высокочастотные неустойчивости	198
§ 10.5. Неустойчивость электронного облака с пемонотной плотностью (диокотронная неустойчивость)	199
Библиографический обзор к гл. 10	200
Глава 11. Слабоионизованная плазма	202
§ 11.1. Низкочастотная неустойчивость из-за градиента плотности	202
§ 11.2. Высокочастотная неустойчивость из-за градиента плотности	204
§ 11.3. Токово-конвективная неустойчивость	205
§ 11.4. Гравитационно-диссипативная неустойчивость	206
§ 11.5. Неустойчивость слабоионизованной плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях	207
Библиографический обзор к гл. 11	210
Глава 12. Плазма в поле с широм	213
§ 12.1. Определение шира	213
§ 12.2. Механизм стабилизации широм	216
§ 12.3. Общие оценки стабилизирующего влияния шира	217
Библиографический обзор к гл. 12	219
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ	
НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ (ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ) ГРАДИЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ПРЯМОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ	224
Глава 13. Уравнения непотенциальных колебаний неоднородной бесстолкновительной плазмы	224
§ 13.1. Введение	224
§ 13.2. Преобразование уравнений Максвелла	225
§ 13.3. Общий вид дисперсионного уравнения для непотенциальных возмущений	227
§ 13.4. Интегралы движения частиц и равновесное состояние плазмы в неоднородном магнитном поле	228
§ 13.5. Равновесные траектории	229
§ 13.6. Возмущенная функция распределения	231
§ 13.7. Диэлектрическая проницаемость неоднородной бесстолкновительной плазмы конечного давления	232
§ 13.8. Дисперсионное уравнение непотенциальных возмущений плазмы низкого давления	233
§ 13.9. Дисперсионные уравнения низкочастотных длинноволновых возмущений плазмы конечного давления	236
Библиографический обзор к гл. 13	240
Глава 14. Непотенциальные неустойчивости плазмы низкого давления	242
§ 14.1. Введение	242
§ 14.2. Неустойчивости плазмы с неоднородной плотностью при $\beta > m_e/m_i$	243

§ 14.3. Стабилизация неустойчивостей, обусловленных градиентом плотности, с ростом давления плазмы	246
§ 14.4. Об уравнениях непотенциальных возмущений столкновительной плазмы низкого давления	250
§ 14.5. Общий критерий применимости приближения $\beta \rightarrow 0$ в случае неустойчивостей, связанных с конечной проводимостью	251
§ 14.6. Непотенциальная инерционно-диссипативная неустойчивость	252
§ 14.7. Граница инерционно-диссипативной неустойчивости при конечных β	255
§ 14.8. Неустойчивости плазмы низкого давления с неоднородной температурой	257
§ 14.9. Альфвеновская неустойчивость струи плазмы с неоднородным профилем скорости	260
§ 14.10. Стабилизация торцами желобковой неустойчивости в плотной плазме	260
§ 14.11. Непотенциальная ионно-циклотронная неустойчивость	262
Библиографический обзор к гл. 14	262
Глава 15. Неустойчивости бесстолкновительной плазмы конечного давления	263
§ 15.1. Введение	263
§ 15.2. Волны Церковникова	264
§ 15.3. Альфвеновские волны в неоднородной плазме конечного давления	266
§ 15.4. Коротковолновые низкочастотные возмущения максвелловской плазмы конечного давления	267
§ 15.5. Градиентно-циклотронная неустойчивость плазмы конечного давления	272
§ 15.6. Стабилизация конусно-градиентной неустойчивости с ростом давления плазмы	277
§ 15.7. Градиентная раскачка альфвеновских волн в струе плазмы конечного давления с неоднородным профилем скорости	281
Приложение к гл. 15. Безынерционные неустойчивости бесстолкновительной плазмы конечного давления	282
Библиографический обзор к гл. 15	290
Глава 16. Неустойчивости столкновительной плазмы конечного давления	292
§ 16.1. Введение	292
§ 16.2. Безынерционные (энтронпийные) волны в столкновительной плазме конечного давления	293
§ 16.3. Инерционные (альфвеновские) волны	295
§ 16.4. Неустойчивости плазмы конечного давления при конечной электронной теплопроводности	297
§ 16.5. Неустойчивости при $k_z \approx \omega_* / v_{Te}$	301
§ 16.6. Желобковая неустойчивость плазмы конечного давления	305
Приложения к гл. 16	

Приложение 1. Уравнения переноса для столкновительной плазмы конечного давления	307
Приложение 2. Уравнения переноса в приближении нулевого ларморовского радиуса ионов, нулевой поперечной теплопроводности и $\partial/\partial z=0$	312
Приложение 3. Неустойчивость энтропийных волн, связанная с гирорелаксационным эффектом	316
Приложение 4. Инерционные возмущения с $k_z=0$ в плазме с $\nabla T \neq 0$	318
Приложение 5. Роль поперечной теплопроводности и поперечной вязкости в возмущениях с $k_z=0$	320
Библиографический обзор к гл. 16	322
Глава 17. Неустойчивости плазмы большого давления	324
§ 17.1. Введение	324
§ 17.2. Неустойчивости неоднородной плазмы большого давления в однородном магнитном поле	326
§ 17.3. Неустойчивости плазмы большого давления с малым градиентом давления	329
§ 17.4. Неустойчивости столкновительной плазмы большого давления	332
§ 17.5. Заключительные замечания о неустойчивостях плазмы большого давления	337
Приложения к гл. 17	
Приложение 1. Неустойчивости бессиловой плазмы большого давления	337
Приложение 2. Уравнения колебаний столкновительной плазмы большого давления при конечной вязкости ионов	342
Приложение 3. Раскачка альфвеновских волн в плазме большого давления, находящейся в неоднородном магнитном поле	347
Библиографический обзор к гл. 17	351
Алфавитно-предметный указатель	352

ИБ № 181

*Анатолий Борисович Михайловский***ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ****Том 2. Неустойчивости неоднородной плазмы**

Редактор В. И. Безрукова
 Художественный редактор А. Т. Кирьянов
 Художник В. И. Тихонов
 Технический редактор И. И. Подшибякин
 Корректоры И. И. Курьянова, П. М. Загудасва

Сдано в набор 12/VI-1976 г. Подписано к печати 25/I-1977 г. Т-0623
 Формат 84×108^{1/32}. Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 18,9. Уч.-изд. л. 19,24.
 Тираж 3050 экз. Цена 2 р. 52 к. Зак. изд. 74031. Зак. тип. 397

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5.
 Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.